Université de Rennes 1 Master 1
Année 2009-2010 ARCB

Contrôle continu $n^o 1$
Corrigé

Exercice 1. Réponse :

1. $A^{\perp} = \{x \in H; \langle x,y\rangle = 0, \textit{pour tout } y \in A\}$.
2. $\forall x,x' \in A^{\perp}$, $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, *et pour tout* $y \in A$ *on a* $\langle \lambda x + \mu x', y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \mu\langle x',y\rangle = 0$ *d'où* $\lambda x + \mu x \in A^{\perp}$. *Soit,* (x_n) *une suite de* $A^{\perp}$ *telle que* $x \to x \in H$, *quand* $n \to +\infty$, *par continuité du produit scalaire, on a, pour tout* $y \in A$, $0 = \lim\langle x_n,y\rangle = \langle x,y\rangle$, *d'où* $x \in A^{\perp}$. *Ainsi,* $A^{\perp}$ *est un fermé de* H.

   Remarque : on peut aussi, en écrivant $A^{\perp} = \cap_{y\in A}\{x \in H; \langle x,y\rangle = 0\}$, *conclure que* $A^{\perp}$ *est une une intersection de fermés, est donc fermé.*
3. *Si* $H = \mathbb{R}$ *et* $A = \{1\}$, *alors* $A^{\perp} = \{0\}$ *est différent de* $A^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbb{R}$.

1. *On commence par écrire,* $f((x_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\overline{(\overline{a_n})} = \langle (x_n),(\overline{a_n})\rangle$ *et remarquer que* $(a_n) \in H$ *car* $\|(a_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$.

   Alors, la linéarité du produit scalaire par rapport à la première composante, donne la linéarité de f, *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* $|f((x_n))| = |\langle (x_n),(\overline{a_n})\rangle| \leq \|(x_n)\|\|(\overline{a_n})\|$, *donne la continuiteé de* f *et le théorème de Riesz permet de conclure que*

   $\|f\| = \|(\overline{a_n})\| = \|(a_n)\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}$.
2. $\ker f = \{(x_n) \in H; f((x_n)) = \langle (x_n),(\overline{a_n})\rangle = 0\} = \{(\overline{a_n})\}^{\perp}$, *d'où*
   $\ker f^{\perp} = \{(\overline{a_n})\}^{\perp\perp} = vect\{(\overline{a_n})\} = \{\lambda(\overline{a_n}); \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction, 1-périodique, définie par $\forall x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, par $f(x) = 4\pi^2x^2$.

1. On voit que $f = 4\pi^2x^2$ est continue sur l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.

   Au point $x = -\frac{1}{2}$, on a $f(-\dfrac{1}{2}) = \pi^2 = \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} 4\pi^2x^2$, par 1-périodicité on a $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = \pi^2 =$ et $f(\dfrac{1}{2}) = \pi^2 = \lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} 4\pi^2x^2$.

   D'où $f(-\dfrac{1}{2}) = \pi^2 = \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^+} 4\pi^2 = \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-} 4\pi^2x^2$. Donc f est continue en $x = -\frac{1}{2}$ et par périodicité elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Comme f est paire, $\widehat{f(n)} = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-2i\pi nx}\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\cos(2\pi nx)\,dx$. Si $n = 0$ alors,

$\widehat{f(0)} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 8\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \dfrac{\pi^2}{3}$ et pour $n \neq 0$,

$\widehat{f(n)} = 8\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\cos(2\pi nx)\,dx = 8\pi^2 \left(\left[x^2 \dfrac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\dfrac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right) dx$

$= -\dfrac{8\pi}{n} \int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(2\pi nx)\,dx = \dfrac{8\pi}{n} \left(\left[x\dfrac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right) dx$

$= \dfrac{2}{n^2}\cos(\pi n) = 2\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

3. Comme f est continue et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f(n)}| = |\widehat{f(0)}| + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |\widehat{f(n)}| = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$, on a, d'après un résultat du cours, que f est égale à sa série de Fourier.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f(n)} e^{2i\pi nx} = \widehat{f(0)} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f(n)}\cos(2\pi nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2\pi nx)$$

En particulier, pour $x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, on a

$$f(x) = 4\pi^2 x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2\pi nx)$$

d'où

$$x^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2\pi nx)$$

4. En évaluant l'expression précédente en $x = 0$, on obtient la relation $0 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$,
et en $x = \frac{1}{2}$ on obtient la relation $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$,
d'où $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \pi^2(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12}) = \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice 3. Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ muni du produit scalaire,

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}\sin(2\pi nx)$, pour tout $x \in [0,1]$.

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système orthogonal de H, car pour tout couple d'éléments de $\mathbb{N}^*$, $m \neq n$ on a $\langle f_m,f_n\rangle = \dfrac{(-1)^{n+m}}{mn}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi mx \sin 2\pi nx\, dx$
$= \dfrac{(-1)^{n+m}}{mn}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\cos 2\pi(m-n)x + \cos 2\pi(m+n)x}{2}\, dx = 0.$
2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|^2 = \frac{1}{n^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin^2 2\pi nx\, dx = \frac{1}{2n^2}$. D'où la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$, par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge dans l'espace de hilbert H.
Remarque : On peut aussi grâce à l'identité de pythagore :
$\| \sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{m} f_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|^2$ et le fait que la suite $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$, déduire que la suite des sommes partielles
$(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et donc converge dans l'espace de Hilbert H.
3. $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\|f_n\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}$.
4. $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_a^b \sin(2\pi nx)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\cos(2\pi na) - \cos(2\pi nb)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2\pi na) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(2\pi nb) = \pi^2(a^2 - \frac{1}{12}) - \pi^2(b^2 - \frac{1}{12}) = \pi^2(a^2 - b^2)$.

Exercice 4.

i) Pour $x \in H$, on
 a) $\|x - P_F(x)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$
 b) $\mathfrak{Re}\langle x - P_F(x), y - P_F(x)\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$.

ii) Soit $x,y \in H$. On a $\|P_F(x) - P_F(y)\|^2 = \langle P_F(x) - P_F(y), P_F(x) - P_F(y)\rangle$
$= \langle (P_F(x) - x) + (x - y) + (y - P_F(y)), P_F(x) - P_F(y)\rangle$
$= \langle P_F(x) - x, P_F(x) - P_F(y)\rangle + \langle x - y, P_F(x) - P_F(y)\rangle + \langle y - P_F(y), P_F(x) - P_F(y)\rangle$
comme $\|P_F(x) - P_F(y)\|^2$ est réel et comme la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles, on aura :
$\|P_F(x) - P_F(y)\|^2 = \mathfrak{Re}\|P_F(x) - P_F(y)\|^2 = \mathfrak{Re}\langle P_F(x) - x, P_F(x) - P_F(y)\rangle + \mathfrak{Re}\langle x - y, P_F(x) - P_F(y)\rangle + \mathfrak{Re}\langle y - P_F(y), P_F(x) - P_F(y)\rangle$
d'après i)b) , $\mathfrak{Re}\langle P_F(x) - x, P_F(x) - P_F(y)\rangle \leq 0$ et $\mathfrak{Re}\langle y - P_F(y), P_F(x) - P_F(y)\rangle \leq 0$ d'où
$\|P_F(x) - P_F(y)\|^2 \leq \mathfrak{Re}\langle x - y, P_F(x) - P_F(y)\rangle \leq |\langle x - y, P_F(x) - P_F(y)\rangle|$

iii) L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors :
$\|P_F(x) - P_F(y)\|^2 \leq |\langle x - y, P_F(x) - P_F(y)\rangle| \leq \|x - y\|\|P_F(x) - P_F(y)\|$ pour tout $x,y \in H$.
D'où si $P_F(x) \neq P_F(y)$ on a $\|P_F(x) - P_F(y)\| \leq \|x - y\|$
si $P_F(x) = P_F(y)$ l'inégalité est trivialement vraie.

iv) Si F contient au moins deux points, disons x,y , comme $P_F(x) = x$ et $P_F(y) = y$ alors $\|P_F(x) - P_F(y)\| = \|x - y\|$ on a donc pas d'inégalité stricte. Ainsi, les seuls convexes fermés pour lesquels on a l'inégalité stricte sont les singletons c-à-d les convexes F de la forme $F = \{a\}$ avec $a \in H$, car dans ce cas, pour tout $x,y \in H$, $x \neq y$, $\|P_F(x) - P_F(y)\| = \|a - a\| = 0 < \|x - y\|$.