Université de Rennes 1 Master 1
Année 2011-2012 ARCB Analyse réelle et complexe de base

Contrôle continu n^o1
mardi 17 octobre 2011
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{x\}) = 0$.
2. Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_E(x) = \lambda\left(E \cap [-|x|,|x|]\right)$.
   (a) Montrer que f_E est une fonction paire et croissante sur $[0, +\infty[$.
   (b) Déterminer f_E lorsque :
   i) $E = \mathbb{Q}$
   ii) $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   iii) $E = [0,1[$
   (c) Sous quelle condition a-t-on $\lim\limits_{x \to +\infty} f_E(x) = +\infty$?
3. En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\cos(x^2)\right)^n dx$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. On désigne par $P_F : H \to F$ la projection orthogonale sur F.

i) Pour $x \in H$, énoncer deux caractérisations de la projection de $P_F(x)$, l'une faisant intervenir la norme et l'autre une égalité sur le produit scalaire.
ii) Montrer que $\|P_F\| = 1$ si $F \neq \{0\}$.
iii) Montrer que P_F est auto-adjoint i.e. $\langle P_F(x),y\rangle = \langle x,P_F(y)\rangle$ pour tout $x,y \in H$.
iv) Soit G un autre sous-espace vectoriel fermé de H. On suppose que $\|P_F \circ P_G\| < 1$. Déterminer $F \cap G$.
v) On suppose que $F = \{x \in H \mid \langle x,a\rangle = 0\}$, où $a \in H \setminus \{0\}$. Déterminer P_F.

Exercice 3.

Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

Soit $V := \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 0 \right\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$.
   Déterminer $V^\perp$.
2. Soit $f(x) = x^2 + x^4$. Calculer $\min\limits_{a,b,c \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x) - ax^2 - bx - c|^2 dx$.
   Déterminer la projection de f sur V.