Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2010-2011 | ARCB Analyse réelle et complexe de base

Contrôle continu $n^o 1$
mardi 18 octobre 2010
Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\, dx$
   où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
2. En utilisant le théorème de convergence dominée (qu'on justifiera soigneusement), calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de
   $$I_n = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} + \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \right) dx.$$
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $F(x) := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,x]} f\, dt$.
   Montrer que si $x_n \to x$ alors $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$.

Exercice 2.

1. Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ muni du produit scalaire :
   $\langle (x_n),(y_n) \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$.

   Soit $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ fixé, on pose $V_N = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} \mid \sum_{n=0}^{N} x_n = 0\}$.

   (a) Montrer que V_N est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

   (b) En déduire que $\mathcal{H} = V_N \oplus V_N^{\perp}$.

   (c) Déterminer $V_N^{\perp}$.

   (d) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $a_0 = 1$ et $a_n = 0$ si $n \geq 1$.
   Calculer la distance de a à V_N.

Exercice 3. Soit l'espace de Hilbert $H = \{f : [1,+\infty[\to \mathbb{R} \mid \int_1^{+\infty} f^2(x) \frac{dx}{x^6} < +\infty\}$ muni du produit scalaire,
$$\langle f,g \rangle = \int_1^{+\infty} f(x)\, g(x)\, \frac{1}{x^6}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 2 est contenu dans H.
2. On pose $e_k(x) = x^k$, pour $k = 0,1$ et 2
   Calculer $\langle e_k, e_l \rangle$ pour $k,l \in \{0,1,2\}$.
3. Déterminer $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 4x + a$ et $P_2(x) = 3x^2 + bx + 10$ et $\{P_0, P_1, P_2\}$ soit un sytème orthogonal.
4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vérifier que $f \in H$.
   Déterminer $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\|f - P\| = dist(f, \mathbb{R}_2[X])$.