Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2010-2011 | ARCB Analyse réelle et complexe de base

Contrôle continu $n^o 1$
Corrigé
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = \mu(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}) = 0$
2. On a
   (a) $\left|\frac{1}{(1+x^2)^n} + \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\right| \le \frac{1}{1+x^2}$, μ p.p. et $\frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} + \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$, μ p.p.
   d'après le théorème de la convergence dominée on aura
   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(1+x^2)^n} + \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\right)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0.$$
3. on a
   (a) $|\mathbb{1}_{[0,x]} f| \le |f|$, μ p.p. et $|f| \in L^1(\mathbb{R})$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{[0,x_n]}(y) f(y) = \mathbb{1}_{[0,x]}(y) f(y)$, μ p.p.
   on obtient par le théorème de la convergence dominée
   $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{[0,x_n]} f\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,x]} f\,dt = F(x).$

Exercice 2.

1. Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ muni du produit scalaire :
   $\langle (x_n),(y_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$.
   Soit $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ fixé, on pose $V_N = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} \mid \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n = 0\}$.
   (a) Soit $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f((x_n)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n$.
   Si on pose $u = (u_n)$ avec $u_0 = u_1 = \ldots = u_N = 1$ et $a_n = 0$ si $n \ge N+1$, alors $a \in \mathcal{H}$ (car $\|u\|_2 = N^{\frac{1}{2}}$) et $f((x_n)) = \langle (x_n),u\rangle$.
   Alors d'après le théorème de Riesz, f est alors une forme linéaire continue et $\|f\| = \|u\|_2$.
   Par suite, $V_N = \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ et $u \perp V_N$.

(b) Comme $\mathcal{H}$ est un espace de hilbert et V_N est fermé, le théorème de la projection entraîne : $\mathcal{H} = V_N \oplus V_N^{\perp}$.

(c) $f(u) = N$ ainsi, $b = \dfrac{u}{N}$ vérifie $f(b) = 1$.
Soit $x \in \mathcal{H}$. On écrit $x = \langle x,u\rangle b + (x - \langle x,u\rangle b)$, comme $f(x - \langle x,u\rangle b) = f(x) - \langle x,u\rangle f(b) = f(x) - \langle x,u\rangle = 0$, $(x - \langle x,u\rangle b) \in V_N$ et $\langle x,u\rangle b \in Vect\{u\}$.
Comme $u \perp V_N$, par unicité de la décomposition on aura $V_N^{\perp} = Vect\{u\}$.

(d) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $a_0 = 1$ et $a_n = 0$ si $n \geq 1$.
$dist(a,V_N) = \|P_{V_N^{\perp}}(a)\|_2$. D'après ce qui précède $P_{V_N^{\perp}}(a) = \langle a,u\rangle b$, d'où $\|P_{V_N^{\perp}}(a)\|_2 = |\langle a,u\rangle|.\|b\|_2$. Comme $\langle a,u\rangle = 1$ et $\|b\|_2 = \|\dfrac{u}{N}\|_2 = \dfrac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$, finalement
$dist(a,V_N) = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$.

Exercice 3. Soit l'espace de Hilbert $H = \{f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} \mid \displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)\frac{dx}{x^6} < +\infty\}$

1. On pose $e_n(x) = x^n$
Alors $\|e_n\|^2 = \int_1^{+\infty} x^{2n}\,\frac{1}{x^6} = \int_1^{+\infty} x^{2n-6}\,dx < +\infty$ si et seulement si $2n - 6 < 0$ i.e $e_n \in H$ si et seulement si $n \leq 2$.
Ainsi, $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 2 est contenu dans H.
2. On pose $e_k(x) = x^k$, pour $k = 0,1$ et 2
$\langle e_k,e_l\rangle = \int_1^{+\infty} x^{k+l}\,\frac{1}{x^6} = \int_1^{+\infty} x^{k+l-6}\,dx = \frac{1}{5-k-l}$ pour $k,l \in \{0,1,2\}$.
3. On doit avoir
   (a) $0 = \langle P_0,P_1\rangle = 4\langle e_0,e_1\rangle + a\langle e_0,e_0\rangle = 1 + \frac{a}{5}$
   d'où $a = -5$.
   (b) $0 = \langle P_0,P_2\rangle = 3\langle e_0,e_2\rangle + b\langle e_0,e_1\rangle + 10\langle e_0,e_0\rangle = 1 + \frac{b}{4} + 2$ d'où $b = -12$.
   (c) On vérifie que $P_1(x) = 4x - 5$ et $P_2(x) = 3x^2 - 12x + 10$ ainsi obtenus sont orthogonaux. $\langle P_1,P_2\rangle = 0$.
4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
$\|f\|^2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{x^6} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^8}\,dx = \frac{1}{7} < +\infty$. D'où $f \in H$.
Déterminer $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\|f - P\| = dist(f,\mathbb{R}_2[X])$.
On cherche la projection P de f sous la forme $P = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$ avec $\langle f,P_i\rangle = \langle P,P_i\rangle$ pour tout $i \in \{0,1,2\}$.
   (a) $\frac{1}{6} = \langle f,P_0\rangle = \langle Q,P_0\rangle = a_0\langle P_0,P_0\rangle = \frac{a_0}{5}$ d'où $a_0 = \frac{5}{6}$.
   (b) $\frac{-1}{30} = \langle f,P_1\rangle = \langle Q,P_1\rangle = a_1\langle P_1,P_1\rangle = \frac{a_1}{3}$ d'où $a_1 = \frac{-1}{10}$.
   (c) $\frac{1}{60} = \langle f,P_2\rangle = \langle Q,P_2\rangle = a_2\langle P_2,P_2\rangle = a_2$ d'où $a_2 = \frac{1}{60}$.
   Ainsi, $P(x) = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 = \dfrac{5}{6} + \dfrac{-1}{10}(4x - 5) + \dfrac{1}{60}(3x^2 - 12x + 10) = \dfrac{1}{20}(30 - 12x + x^2)$.