Université de Rennes 1 — Master 1
Année 2011-2012 — ARCB

Examen terminal

Lundi 12 décembre 2011
Durée 2h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. Soit $\mathcal{H} = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire, $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$. On note $e_n(x) = e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$. On pose $M := \{f \in \mathcal{H} \mid \langle f, e_n\rangle = 0, \text{ pour tout } n < 0\}$.

1. Montrer que M est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ et que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de M.
2. Déterminer les projections orthogonales sur M de $f(x) = \dfrac{1}{2-e^{ix}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-2e^{ix}}$.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on considère $\Phi_z : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, définie par $\Phi_z(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle z^n$. Montrer que Φ_z est bien définie. Justifier l'existence de l'unique $f_z \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi_z(f) = \langle f, f_z\rangle$ pour tout $f \in \mathcal{H}$. Déterminer f_z.

Exercice 2.

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3|x|}$ est intégrable. Calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xy)}{9+x^2}\,dx = \frac{\pi}{3} f(y)$.
3. Soit g une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{9+t^2}$.
   Montrer que g est bornée, puis majorer pour $x > 1$, $\left| g(x) - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right|$.
   En déduire que $g \in L^2(\mathbb{R})$, mais n'est pas un élément de $L^1(\mathbb{R})$.
4. Montrer que pour $y \neq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n g(x)\sin(xy)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xy)}{(9+x^2)y}\,dx$.
   En déduire la transformée de Fourier-Plancherel $\mathscr{F}(g)$.

Exercice 3. Soit $P(z) = z^{81} + 3z^{60} + 1$.

1. Montrer que P a 60 racines toutes distinctes (i.e. de multiplicité 1) dans $D(0,1)$.
2. Montrer que les autres racines sont dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Tourner la page s.v.p.

Exercice 4. Soit $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$.

1. Déterminer le développement en série de Laurent de f dans les couronnes :
   (a) $0 < |z| < 1$
   (b) $|z| > 1$
2. Calculer $\displaystyle\int_{C^+(0,4)} f(z)\,dz$

Exercice 5. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ contenant $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$.
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que :
$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $f(\mathcal{H}^+) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(z) \geq 0\}$.
Soit $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(z) = f(z)$ si $z \in \mathcal{H}^+$ et $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $z \notin \mathcal{H}^+$.
Montrer que g est une fonction entière et que $\left|\dfrac{1}{1+g}\right| \leq 1$.
En déduire que f est constante.

Exercice 6.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt$. On pose $I = \{a \in \mathbb{R} \,|\, F(a) < \infty\}$.
   Montrer que I est un intervalle, que l'on déterminera.
2. Déterminer les singularités de $g(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ ainsi que les résidus en ces points.

   En intégrant g, en déduire que pour tout $a \in I$: $F(a) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$.
3. On suppose maintenant que $a \in \mathbb{C}$. On pose $U = \{a \in \mathbb{C} \,|\, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{at}}{1+e^t}\right| dt < \infty\}$.
   Déterminer U. En déduire que $F(a) = \dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$ pour tout $a \in U$.
4. Soit $a = \alpha + i\beta$ un point de U. Soit $r = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$.
   Montrer que la série entière
   $$\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^n e^{at}}{1+e^t}\,dt \qquad (1)$$
   converge dans le disque $D(0,r)$.
   En déduire que le développement en série entière de $\dfrac{\pi}{\sin(z\pi)}$ dans $D(a,r)$ est donné par (1)