Université de Rennes 1 — Master 1
Année 2009-2010 — ARCB

Devoir
à rendre le mardi 03 novembre 2009

Partie1-Le théorème de Lax-Milgram

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Soit $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

On suppose que a est continue dans le sens où il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \qquad \forall x,y \in \mathcal{H}.$$

On suppose également que a est **coercitive** dans le sens où il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|a(x,x)| \geq \alpha\|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

(i) Pour $x \in \mathcal{H}$ fixé, démontrer que la forme linéaire $T_x : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ définie par, $y \mapsto T_x(y) = a(x,y)$ est continue.

(ii) Montrer qu'il existe un unique élément, que nous noterons $A(x)$, tel que

$$T_x(y) = \langle A(x),y\rangle \qquad \forall y \in \mathcal{H}.$$

(iii) Montrer que l'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $x \mapsto A(x)$ est linéaire, et de plus elle vérifie

$$\|A(x)\| \leq C\|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{H} \tag{1}$$

et

$$\langle A(x),x\rangle \geq \alpha\|x\|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{H} \tag{2}$$

(iv) Montrer que l'application A est injective.

(v) Nous allons montrer qu'elle est surjective. Soit $z \in \mathcal{H}$ et $\beta > 0$ fixés, on définie l'application $\phi_{\beta,z} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par $\phi_{\beta,z}(x) = x + \beta(z - A(x))$.
Montrer en utilisant (1) et (2), que pour β assez petit, $\phi_{\beta,z}$ est une application contractante i.e. il existe $0 \leq K < 1$, tel que $\|\phi_{\beta,z}(y) - \phi_{\beta,z}(y')\| \leq K\|y - y'\|$ pour tout $y,y' \in \mathcal{H}$.
Conclure, en utilisant le théorème du point fixe, qu'il existe un unique x telle que $x = \beta(z - A(x)) + x$.
En déduire que l'application A est surjective.

(vi) Démontrer que pour toute forme linéaire continue $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ il existe un unique $x \in \mathcal{H}$ tel que :

$$f(y) = a(x,y) \qquad \forall y \in \mathcal{H}$$

(Il s'agit d'une généralisation du théorème de Riesz ne nécessitant pas le caractère symétrique de la forme bilinéaire)

Partie 2-Transformée de Fourier

Exercice 1. Soit A une matrice symétrique réelle $n \times n$ telle qu'il existe une constante $\alpha > 0$ avec

$$\langle Ax,x\rangle \geq \alpha\|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que la fonction f définie par $x \mapsto e^{-\langle Ax,x\rangle}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.
2. On se propose de calculer la transformée de Fourier de f.
   i) Traiter le cas $n = 1$.
   ii) Traiter le cas A diagonale.
   iii) En diagonalisant A dans une base orthonormée, déduire la transformée de Fourier de f.

Exercice 2.

1. Soit g_n l'indicatrice de $[-n,n]$, et h l'indicatrice de $[-1,1]$. Calculer explicitement $g_n \star h$.
2. Montrer que $g_n \star h$ est la transformée de Fourier de

$$f_n = \frac{1}{x^2\pi^2} \sin(2\pi nx)\sin(2\pi x).$$

3. Montrer que $\|f_n\|_1 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
4. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$.
5. Montrer que son image est dense.