ARA: Algèbre et Arithmétique

ARA-Partie 1 : Logique

1 Introduction

La logique est depuis lantiquité l'une des grandes disciplines de la philosophie. Au XIXème siècle, Boole introduisit l'approche mathématique de la logique. Le but est alors de formaliser la notion de déduction mathématique. De nos jours, le développement de l'informatique a donné un nouveau regain à cette discipline.

2 Calcul propositionnel

2.1 Assertion

2.1 DÉFINITION
On appelle assertion *ou* proposition *un assemblage de mots (construit dans un langage donné) à laquelle on peut donner une valeur de vérité* : *V (vraie) ou F (fausse).*

2.2 EXEMPLE.
- "2 est un entier impair" est une assertion (fausse).
- "$(1000+1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$" est une assertion (vraie).
- "$1 =$" n'est pas une assertion.

En mathématiques, une assertions vraie est appelée *lemme*, *proposition* ou *théorème* selon le degré d'importance.

2.2 Opérations sur les assertions

A partir d'assertions, on peut en construire de nouvelles à l'aide d'opérateurs logiques.

2.3 DÉFINITION
Soient P et Q deux assertions. On définit les assertions suivantes :

la négation de P, notée (non P), ($\neg$P) ou ($\overline{\text{P}}$), est vraie lorsque P est fausse, et fausse sinon ;

la disjonction de P et Q, notée (P ou Q), (P+Q) ou (P$\vee$Q), est vraie lorsqu'au moins une des deux assertions est vraie, et fausse sinon ;

la conjonction de P et Q, notée (P et Q), (P.Q) ou (P$\wedge$Q), est vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies, et fausse sinon.

Les valeurs de vérités de ces nouvelles assertions sont réunies dans ces tableaux, appelés tables de vérité :

P	$(non\ P)$
V	F
F	V

P	Q	$(P\ ou\ Q)$	$(P\ et\ Q)$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

2.4 Remarque
Souvent dans le langage courant, le "ou" est un "ou" exclusif, ce qui n'est pas le cas du "ou" mathématique.

2.3 Implication, équivalence

2.5 Définition
Soient P et Q deux assertions, l'assertion P implique Q, notée (P $\Rightarrow$ Q), est définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2.6 Remarque
En écrivant (P $\Rightarrow$ Q), on n'affirme strictement rien sur la véracité de P ou celle de Q.

Ainsi, l'assertion (P $\Rightarrow$ Q) est vraie dès lors que P est fausse. Par exemple, l'assertion "$(2 = 3) \Rightarrow (1 = 4)$" est vraie.

2.7 Exemple. Écrire la table de vérité de (non Q) $\Rightarrow$ (non P). Cette assertion s'appelle *contraposée* de (P $\Rightarrow$ Q).

Montrer que si P est vraie et si (P $\Rightarrow$ Q) est vraie, alors Q est vraie.

2.8 Définition
L'assertion (Q $\Rightarrow$ P) est appelée assertion réciproque de (P $\Rightarrow$ Q).

L'équivalence entre P et Q, notée P $\Leftrightarrow$ Q, est définie par (P $\Rightarrow$ Q) et (Q $\Rightarrow$ P), autrement dit par la table suivante :

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.9 Exemple. En écrivant sa table de vérité, démontrer l'assertion suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\ P\ ou\ Q)$$

2.4 Les priorités d'écriture

Le "non" est prioritaire devant "et", "ou" "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$".
Les connecteurs "et" et "ou" sont prioritaires devant "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$".

2.10 EXEMPLE. L'assertion (non P et Q) est équivalente à (non P) et Q.

3 Méthodes de démonstration

3.1 EXEMPLE.

En écrivant les tables de vérité, démontrer les théorèmes suivants :

3.2 THÉORÈME (SUR LA NÉGATION)
non (P et Q) $\Leftrightarrow$ non P ou non Q.
non (P ou Q) $\Leftrightarrow$ non P et non Q.

3.3 THÉORÈME (LE TIERS EXCLU)
P ou non P.

3.4 THÉORÈME (MODUS PONENS)
P et (P $\Rightarrow$ Q) $\Rightarrow$ Q.

3.5 THÉORÈME (TRANSITIVITÉ DE L'IMPLICATION)
(P $\Rightarrow$ Q) et (Q $\Rightarrow$ R) $\Rightarrow$ (P $\Rightarrow$ R).

3.6 THÉORÈME (CONTRAPOSÉE)
(P $\Rightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ (non Q $\Rightarrow$ non P).

3.7 THÉORÈME (DISJONCTION DE CAS)
(P ou Q) et (P $\Rightarrow$ R) et (Q $\Rightarrow$ R) $\Rightarrow$ R.

3.8 THÉORÈME (RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE)

(non P $\Rightarrow$ Q) et (non P $\Rightarrow$ non Q) $\Rightarrow$ P.

3.9 EXEMPLE. une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité de ses variables est appelée **tautologie**. Ainsi, le théorème 2 nous dit que *P* ou non P" est une tautologie. Vérifier que les assertions suivantes sont également des tautologies :

1. P $\Leftrightarrow$ P ;
2. (P et Q) $\Rightarrow$ P ;
3. P $\Rightarrow$ (P ou Q).

3.1 Assertions quantifiées

On considère souvent une famille $(P(x))_{x\in E}$ d'assertions, autrement dit des assertions $P(x)$ dépendant d'un paramètre x qui parcoure un ensemble E. Par exemple, la famille $(P(n))_{n\in\mathbb{N}} = (n\text{est pair})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'assertions indexée par $\mathbb{N}$. Ici, $P(2)$ est vraie alors que $P(3)$ est fausse.

On peut alors construire deux nouvelles assertions :

3.10 Définition

Une assertion universelle "$\forall x \in E,\ P(x)$" qui se lit " Pour tout élément x de E, $P(x)$ est vraie ". Cette assertion est vraie lorsque toutes les assertions $P(x)$ sont vraies, quel que soit l'élément x de E.

Une assertion existentielle $\exists x \in E : P(x)$ qui se lit "Il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie". Cette assertion est vraie lorsque l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.

3.11 Exemple. Démontrer la proposition suivante :

3.12 Proposition

non $(\forall x \in E,\ P(x)) \iff \exists x \in E : \text{v}\ P(x)$.

non $(\exists x \in E : P(x)) \iff \forall x \in E, \text{non}\ P(x)$.

3.13 Exemple. La négation de $(\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x))$ est $(\exists x : P(x)\ \textit{et non}\ Q(x))$. La négation de $(\forall x \in E,\ P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ est :

$\exists x$ ($P(x)$ ET non $Q(x)$) ou ($Q(x)$ et non $P(x)$)

3.2 Démonstration par récurrence

On se sert du raisonnement par récurrence pour montrer qu'une famille d'assertions $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par sur les entiers naturels est vraie pour tout n.

3.14 Théorème

Soit $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'assertions indexée par sur les entiers naturels. Si

(1) $P(0)$ *est vraie,*

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$,

alors pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

Démonstration: Admise. ■