Licence 1 — MIEE 2015–2016

ARA: Algèbre et Arithmétique

ARA-Partie 2 : Théorie des ensembles

1 Ensembles, sous ensembles.

1.1 Définitions

1.1 DÉFINITION
Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés éléments de l'ensemble.

Pour dire que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$. Pour dire que x n'est pas un élément de l'ensemble E, on écrit $x \notin E$.

1.2 DÉFINITION
Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$ si tout élément de E appartient à F. En termes logiques, on a donc :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E,\ x \in F.$$

On dit alors que E est un sous-ensemble de F, ou une partie de F.

L'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, appelé ensemble des parties de E, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

1.3 DÉFINITION
L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Par définition, il est donc inclus dans tout ensemble.

1.4 EXEMPLE. Si $E = \{a,\ b,\ c\}$ est l'ensemble dont les éléments sont a, b et c, alors l'ensemble de ses parties est

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\}.$$

Souvent pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on procédera par *double inclusion* :

1.5 PROPOSITION
Soient A et B *deux ensembles. Si* $A \subset B$ et $B \subset A$ *alors* $A = B$.

Démonstration: Exercice. ■

1.7 PROPOSITION
Si $A \subset B$ et $B \subset C$ *alors* $A \subset C$.

Démonstration: Exercice. ■

1.9 EXEMPLE. On rappelle que :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{Z} = \{-3, 0, 5 \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0\}$ est l'ensemble des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C} = \{x + iy | x,\ y \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des nombre complexes.

On rappelle également qu'on a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.2 Extension et compréhension

On dit qu'un ensemble est décrit en *compréhension* lorsqu'il réunit les éléments vérifiant une propriété.

On dit qu'un ensemble est décrit en *extension* lorsqu'on liste ses éléments.

Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} | -2 \leq n \leq 2\}$ et $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension du même ensemble.

1.10 Exercice
- Décrire en compréhension l'ensemble des entiers pairs, puis l'ensemble des entiers impairs.
- Décrire en compréhension puis en extension l'ensemble des diviseurs de 12.
- Décrire en compréhension 1'ensemble des multiples de 10.
- Comparer les ensembles suivants :

$$A = [-1, 1],\ B = \{x \in \mathbb{R} | \exists t \in \mathbb{R},\ x = cos(t)\},\ C = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x^2 \leq 1\}.$$

2 Opérations sur les parties d'un ensemble

2.1 DÉFINITION
Soient A et B *deux parties d'un ensemble E. On appelle* : . intersection *de* A et B *la partie de E déffinie par* :

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A\ ET\ x \in B\};$$

. réunion *de* A et B *la partie de E définie par* :

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A\ OU\ x \in B\};$$

. différence *de* A et B *la partie de E définie par* :

$$A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\};$$

. complémentaire *de* A *dans E la partie de E définie par* :

$$^{c}A = E \backslash A = \bar{A} = \{x \in E | x \notin A\};$$

2.2 Exercice Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2, 3\} B = \{1, 4\}$. Déterminer

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A \backslash B,\ B \backslash A,\ {}^cA.$$

2.3 Exercice Montrer que

. $A \cup A = A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap B = B \cap A$,
. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
. ${}^c(A \cup B) = ({}^cA) \cap ({}^cB)$,
. $A \subset B \Rightarrow {}^cB \subset {}^cA$.
.$A \setminus B = A \cap {}^cB$.

Indication : *Faire le lien avec le chapitre précédent, et les propriétés du type*

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \ldots$$

3 Produit cartésien

A partir de deux éléments a et b, on définit le *couple* $(a,\ b)$. Deux couples $(a,\ b)$ et $(a',\ b')$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. A partir de deux ensembles A et B, on définit le *produit cartésien* de A et B comme étant 1'ensemble des couples $(a,\ b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,\ b) | a\ \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Lorsque $A = B$, le produit cartésien de A par A se note aussi A^2.

De même, on peut définir la notion de *triplet* $(a,\ b,\ c)$ avec la propriété :

$$(a,\ b,\ c) = (a',\ b',\ c') \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b' \text{ ET } c = c'),$$

ainsi que le produit :

$$A \times B \times C = \{(a,\ b,\ c) | a\ \in A \text{ et } b \in B \text{ et } c \in C\}.$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir la notion de *n-uplet* et ensemble

$$A_1 \times A_2 \cdots \times A_n = \{\ (a_1,\ \ldots,\ a_n) | a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n\}.$$

4 Applications

Dans toute cette section, A et B sont des ensembles.

4.1 Définition

4.1 DÉFINITION

On appelle graphe de A vers B une partie Γ de $A \times B$ qui vériffie la propriété

$$\forall x \in A,\ \exists!\ y \in B \mid (x,\ y) \in \Gamma.$$

Une application (ou fonction) f de A vers B est la donnée d'un triplet $(A,\ B,\ \Gamma)$ avec Γ un graphe de A vers B.

On dit que A est l'ensemble de départ de f, et que B est son ensemble d'arrivée.

Si $b = f(a)$, alors on dit que b est l'image de a par f et que a est un antécédent de b par f.

4.2 REMARQUE
Si $f : A \to B$ est une application, tout élément $a \in A$ a exactement une image par f, alors qu'un élément $b \in B$ peut avoir $0, 1$ ou plusieurs antécédents par f.

4.3 EXEMPLE. Dessiner les ensembles suivants. Décider lesquels sont les graphes de fonction, et le cas échéant, déterminer cette fonction.

1) $\Gamma_1 = \{(t,\ t^2) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$;
2) $\Gamma_2 = \{(t,\ t^2) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
3) $\Gamma_3 = \{(t^2,\ t) | t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$;
4) $\Gamma_4 = \{(t^2,\ t) | t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
5) $\Gamma_5 = \{(t^2,\ t) | t \in \mathbb{R}^-\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$;
6) $\Gamma_6 = \{(t^2,\ t) | t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$;

Pour tout ensemble A, il existe toujours au moins une application de A dans A appelée identité de A et définie par :

$$\begin{aligned} Id_A : & A \to A \\ & a \mapsto a \end{aligned}$$

4.4 DÉFINITION
Si $f : A \to B$ *est une application et* $S \subset A$ une partie de A, alors ensemble

$$f(S) = \{b \in B | \exists a \in S,\ b = f(a)\}$$

est appelé image de S par f.
L'ensemble $f(A) \subset B$ est appelé l'image de f. On le note aussi $im(f)$.
Si T est une partie de B, alors on définit l'ensemble

$$f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

4.5 DÉFINITION
Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est injective (ou que f est une injection) si f vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :
. tout élément de B *admet au plus un antécédent par* f ;
. pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ *admet au plus une solution dans* A ;
. $\forall (a,\ a') \in A^2,\ a \neq a' \Leftrightarrow f(a) \neq f(a')$.

4.6 Exercice Vérifier que ces propriétés sont bien équivalentes.

Méthode : Pour montrer que l'application $f : A \to B$ est injective, on considère $a,\ a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$, et on montre que nécessairement $a = a'$.

(Exercice : justifier cette méthode.)

4.7 Exercice Démontrer que l'application

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n^3 + n$$

est injective.

4.8 Exercice Dans l'exercice de la section précédente, on avait vu que les ensembles Γ_1, Γ_2, Γ_4, Γ_5 étaient des graphes de fonction. Déterminer lesquelles de ces fonctions sont injectives.

4.9 DÉFINITION

On dit qu'une application $f : A \to B$ est surjective (ou une surjection) si tout élément de B admet (au moins) un antécédent par f.

Ceci revient à dire que $im(f) = B$.

4.10 EXEMPLE. L'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

est surjective.

4.11 Exercice Reprendre les fonctions de l'exercice précédent et déterminer lesquelles sont surjectives.

4.12 DÉFINITION

On dit qu'une application $f : A \to B$ est bijective (ou une bijection) *si elle est à la fois injective et surjective.* Ceci revient à dire que tout élément de B *admet exactement un antécédent par* f.

4.13 EXEMPLE. L'application Id_A est bijective.

4.14 Exercice Montrer que si $f : A \to B$ est injective, alors $f : A \to im(f)$ est bijective.

4.3 Composition

En plus de A et B, on se donne dans cette section deux autres ensembles C et D.

4.15 DÉFINITION
Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux applications, alors l'application

$$A \to C$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

est appelée composition de g et f. On la note $g \circ f$.

4.16 PROPOSITION
Etant données trois applications $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, on a

$$h \circ (g \circ h) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration: Exercice. ■

4.18 PROPOSITION
Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications.
. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Démonstration: On démontre ici le premier point. Le second est en exercice et le troisième et une conséquence immédiate des deux précédents.

Supposons donc f et g injectives. Soient a et a' deux éléments de A tels que $g \circ f(a) = g \circ f(a')$.

Par injectivité de g, on a $f(a) = f(a')$.

Par injectivité de f, on a alors que $a = a'$. ■

4.20 PROPOSITION
Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$.
Si $g \circ f$ *est injective, alors* f l'est aussi.
Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

Démonstration: Ici, on démontre le second point et on laisse le premier en exercice. Soit $c \in C$. On suppose que $g \circ f$ est surjective : on peut donc considérer un antécédent $a \in A$ de c par $g \circ f$. On a alors

$$g(f(a)) = g \circ f(a) = c,$$

et $f(a)$ est donc un antécédent de c par g. ■

4.4 Application réciproque

4.22 DÉFINITION
Soit $f : A \to B$ une application bijective. L'application réciproque de f est l'application de B vers A qui à tout élément de B associe son unique antécédent dans A par f. Elle se note f^{-1}. On a donc

$$\forall (a,\ b) \in A \times B,\ b = f(a) \Leftrightarrow a\ = f^{-1}(b).$$

4.23 EXEMPLE. 1) L'application

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$t \mapsto t^2$$

est bijective et sa réciproque est notée $\sqrt{}$.
2) L'application

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

$$x \mapsto sin(x)$$

est bijective. Sa réciproque est notée *arcsin*.

4.24 PROPOSITION
Si $f : A \to B$ *est bijective, alors on a*
$f \circ f^{-1} = Id_B$ et $f^{-1} \circ f = Id_A$.

Démonstration: On démontre la première égalité et on laisse la seconde en exercice. Les applications $f \circ f^{-1}$ et Id_B sont bien toutes les deux de B dans B.
Soit $b \in B,\ a = f^{-1}(b)$ est (l'unique) antécédent de b par f. On a donc

$$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = Id_B(b).$$

4.26 PROPOSITION
Si $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux applications vérifiant $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f et g sont toutes deux bijections et réciproques l'une de l'autre.

Démonstration: Comme $g \circ f$ est injective, f l'est aussi. Mais f est aussi surjective parce que $f \circ g$ est surjective. Donc f est bijective.
De même, g est bijective.
Il reste maintenant à montrer que g est bien la réciproque de f, ce qui est laissé en exercice. ■

4.28 COROLLAIRE
Si f est une bijection de A vers B, alors f^{-1} est une bijection de B vers A.
