UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique

Feuille n°3 : division euclidienne

Exercices à savoir faire

Exercice 1

Sachant que $12079233 = 75968 \times 159 + 321$ déterminer le reste de la division euclidienne de 12079233 par 75968, puis par 159.

Exercice 2

La somme de deux nombres multiples de 7 est-elle un multiple de 14 ?

Exercice 3

Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez-vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 4

Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geqslant 1$ (c'est-à-dire quotient et reste), donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b.

Exercice 5

Si n est un entier, on note $D_n = \{k \in \mathbf{N} \mid k \text{ divise } n\}$.
Soient $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $D_n = D_m$: a-t-on $n = m$?

Exercice 6

Peut-on trouver un nombre entier a vérifiant les conditions suivantes

1. a s'écrit avec 4 chiffres en base 10,
2. a est supérieur ou égal à 7000,
3. a est impair et multiple de 45,
4. le chiffre des milliers est le double de celui des centaines ?

Exercice 7

1 Écrire 1234 en base 5.

2 Écrire $\overline{1234}^{(5)}$ en base 10.

Exercice 8

Ecrire en base 7 les nombres suivants

1 $A = 7^4 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5$

2 $B = 7^5 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 8$

3 $C = 7^4 + 7^3 \times 7 + 3 \times 7$

Exercice 9

1 Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale le nombre mille sept-cent quatre-vingt-neuf.

2 Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?

3 Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

Exercice 10

Soit n un entier dont l'écriture décimale est $\overline{abc}$. Montrer que $n \equiv 2a+3b+c \pmod 7$.

Exercice 11

1 Montrer que 777 est divisible par 37.

2 Montrer que les nombres qui s'écrivent $\overline{aaabbb}$ en base 10 sont divisibles par 37.

Exercice 12

Montrer que pour tout entier naturel n le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

Exercice 13

Déterminer suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.

Exercice 14

1 Donner si possible un exemple de deux entiers n et m dont le produit nm est divisible par 5 sans que ni n ni m ne le soit.

2 Donner si possible un exemple de deux entiers n et m dont le produit est divisible par 15 sans que ni n ni m ne le soit.

Exercice 15

Soit n un entier, $n \geqslant 2$. Réduire les fractions suivantes

$$\frac{82}{130}, \frac{52}{105}, \frac{76}{176}, \frac{n(n-1)}{n^2-1}$$

Exercice 16

1 Soit m et n des entiers relatifs tels que m divise à la fois $8n+7$ et $6n+5$. Montrer que $m=\pm 1$.
2 Soit a un entier relatif. Déterminer le pgcd d des entiers $m=14a+3$ et $n=21a+4$ et trouver des entiers u et v tels que $um+vn=d$.

Exercice 17

1 Trouver des entiers relatifs u et v tels que $29u+24v=1$.
2 Déterminer l'ensemble des couples $(u,v)\in \mathbf{Z}^2$ tels que $29u+24v=3$.

Exercice 18

Si $(a,b)=(30,21)$, calculer $d=\text{pgcd}(a,b)$, $l=\text{ppcm}(a,b)$ et déterminer un couple d'entiers (u,v) tels que $au+bv=d$.

Exercice 19

1 Déterminer $\text{pgcd}(245,162)$.
2 Déterminer $\text{ppcm}(245,162)$.

Exercice 20

Déterminer tous les couples $(a,b)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ tels que $a+b=72$ et $\text{pgcd}(a,b)=9$.

Exercice 21

1 Trouver tous les couples $(x,y)\in\mathbf{Z}^2$ tels que $3x+7y=5$.
2 Résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $3x\equiv 5 \pmod 7$.

Exercice 22

1 L'entier 6 a t-il un inverse modulo 77 ? Si oui, en déterminer un.
2 Résoudre l'équation $6x\equiv 5 \pmod{77}$.

Exercices à chercher

Exercice 23

Effectuer la division euclidienne de 903 par 37.
1 Quel est le plus petit nombre qu'il faut ajouter à 903 pour que le quotient augmente de 1 ?
2 Quel est le plus petit nombre qu'il faut enlever à 903 pour que le quotien diminue de 1 ?

Exercice 24

1 Rappeler le critère de divisibilité par 3.
2 Déterminer un critère de divisibilité par 11.
3 Déterminer $pgcd(41, 11111)$.
4 Les nombres $111, 1111, 11111, 111111$ sont-ils premiers ?

Exercice 25

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que cet entier est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 8123$?

Exercice 26

Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de trois chiffres qui s'écrivent avec 2, 5 et 8 et dont les trois chiffres sont distincts ? Montrer sans la calculer que leur somme vaut $(2 + 5 + 8) \times 111 \times 2$.

Exercice 27

Montrer que si $n + m$ est pair, il en est de même pour $n - m$.
Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation $n^2 - m^2 = 30$.

Exercice 28

Enoncer et démontrer le critère de divisibilité par 9.
Donner une condition nécessaire est suffisante pour qu'un entier soit divisible par 45.
En déduire un critère de divisibilité par 45.
Les nombres suivants sont-ils divisibles par 45 : 3546733, 25413985, 2472480 ?

Exercice 29

1 Calculer $\overline{4023}^{(5)} \times \overline{12}^{(5)}$.
2 Calculer $\overline{2345}^{(6)} \times \overline{52}^{(6)}$.

Exercice 30

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1254}$ et son double $\overline{2541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

Exercice 31

1 Éxiste-t-il un base a dans laquelle $\overline{82}^{(a)} = 3 \times \overline{28}^{(a)}$?
2 Éxiste-t-il un base b dans laquelle $\overline{23}^{(b)} + \overline{53}^{(b)} = \overline{80}^{(b)}$?

Exercice 32

Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre de quatre chiffres écrit en base 10. On pose $P = \overline{udcm}$. Montrer que $N + P$ est divisible par 11 et donner le quotient de la division de $N + P$ par 11.

Exercice 33

Soit N, p, a et b des entiers naturels.

On doit livrer N ampoules dans des petits cartons contenant p ampoules, des cartons moyens contenant $m = ap$ ampoules et des gros cartons contenant $g = abp$ ampoules. On privilégie les gros cartons devant les moyens et les moyens devant les petits.

1 Montrer qu'on ne peut livrer que des nombres multiples de p ampoules.

2 Quelles sont les opérations qui permettent de calculer le nombre de cartons de chaque type ?

3 Si $m = p^2$ et $g = p^3$ quelle est l'écriture de N la mieux adaptée au calcul du nombre de cartons de chaque type ?

Exercice 34

Quel est le plus petit entier (strictement positif) qui est multiple de 1, 2, 3,. . ., 10 ?

Exercice 35

Remarquer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. En déduire un procédé simple du calcul du reste de la division euclidienne par 11 d'un entier écrit sous forme décimale.

Exercice 36

Quels sont les trois derniers chiffres de $7^{100} - 3^{100}$? (*Écrire* $7 = 10 - 3$ *et utiliser la formule du binôme.*)

Exercice 37

Montrer que $k(k+1)\cdots(k+n-1)$ est divisible par $n!$.

Exercice 38

1 Déterminer la parité des solutions entières de l'équation $x^3 + 6x^2 + 4x - 9 = 0$

2 Ces solutions sont-elles divisibles par 3 ?

3 On note $P(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 9$. Montrer que

- si $x \geqslant 1$, alors $P(x) \geqslant 1$.
- si $x \leqslant 0$, alors $P(x) \leqslant x^2(x + 6x)$.

4 En déduire l'ensemble des solutions *entières* de l'équation $x^3 + 6x^2 + 4x - 9 = 0$.

Exercice 39

On range 461 pots de yaourts dans des caisses (toutes identiques), en remplissant entièrement une caisse avant de passer à la suivante. On utilise 14 caisses ; combien chaque caisse contient-elle de pots ? (d'après D. Perrin ; plusieurs solutions sont possibles.)

Exercice 40

Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tels que $a + b - \text{pgcd}(a, b) = 1$.

Exercice 41

Déterminer tous les entiers naturels n tels que

$$\begin{cases} 17085 \equiv 12 \pmod{n} \\ 5399 \equiv 2 \pmod{n}. \end{cases}$$

Exercices pour aller plus loin

Exercice 42

Soit A l'entier 4444^{4444} ; soit B la somme de ses chiffres, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C. Que vaut D ?

Exercice 43

Que pourrait être la « preuve par $b - 1$ » en base b ?

Exercice 44

Vous disposez d'un stock illimité de billets de banque de valeur « p euros » et de valeur « q euros », où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer qu'à partir d'une certaine somme, vous pouvez payer tous les montants.

Exercice 45

Soit a, b, c des entiers. On suppose que a divise bc et que $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

1 Montrer que a divise c. (*Multiplier par c une relation de Bézout* $1 = au + bv$.)

2 Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. On suppose que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d) = 1$ et que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ est entier. Montrer que $b = d$.