UNIVERSITÉ DE RENNES 1 ueb

Algèbre et Arithmétique

Feuille n° 2 : théorie des ensembles, applications

Exercices à savoir faire

Exercice 1

Déterminer les ensembles correspondants aux régions grisées.

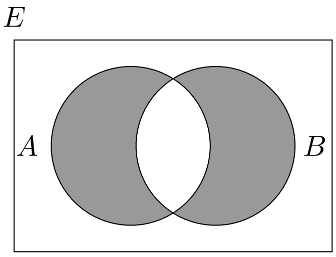


Figure 1

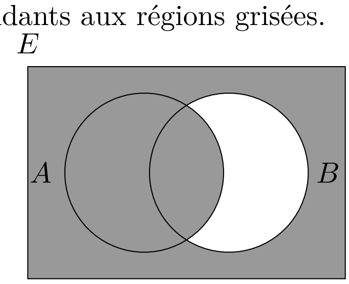


Figure 2

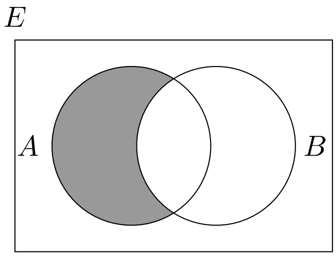


Figure 3

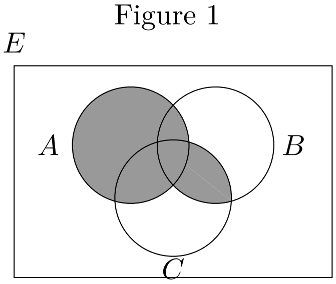


Figure 4

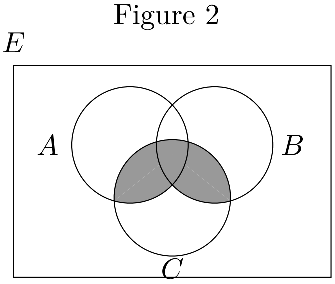


Figure 5

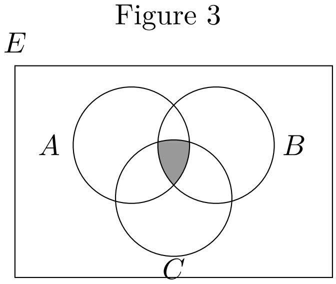


Figure 6

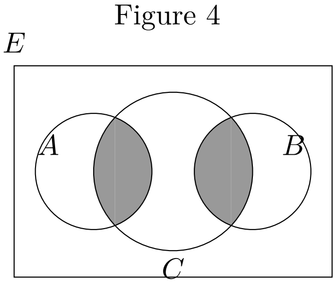


Figure 7

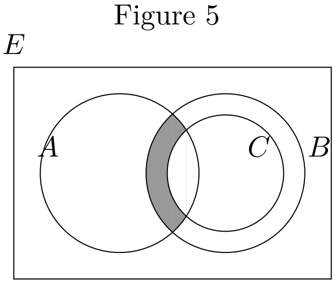


Figure 8

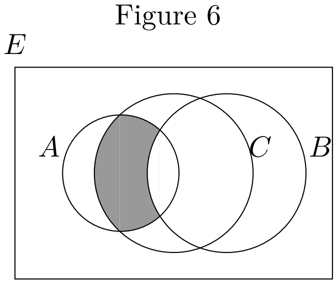
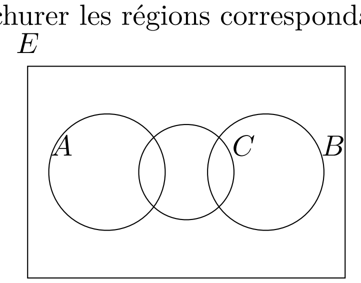


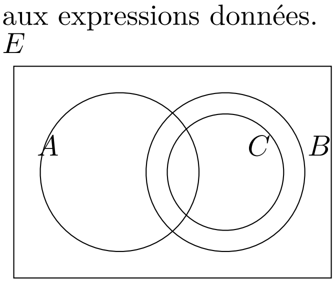
Figure 9

Exercice 2

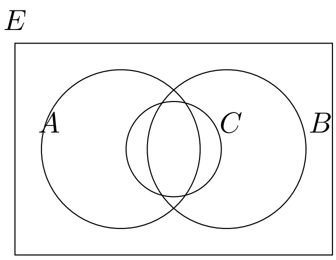
Hachurer les régions correspondants aux expressions données.



$(C \cap B^c) \cap A$



$(B \cup A) \setminus C$



$(A \setminus B) \cap C$

Exercice 3

1) Soit A un sous ensemble de $\mathbf{N}$ dont tous les éléments sont strictement plus grands que 100. Que peut-on dire du plus grand élément du complémentaire de A ?

2) Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cap B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

3) Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cup B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

Exercice 4

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer les égalités $\mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$, $\mathcal{C}_E(A \cap B) = \mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Illustrer le résultat avec des patates et des couleurs.

Exercice 5

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer les formules suivantes :
1) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
2) $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$.
3) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \mathcal{C}_E B = A \cap \mathcal{C}_E C$.

Exercice 6

Soit E un ensemble. Démontrer les formules suivantes :

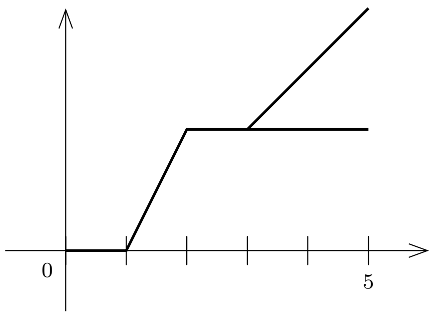
1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup B \subset A \cap B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$.
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 7

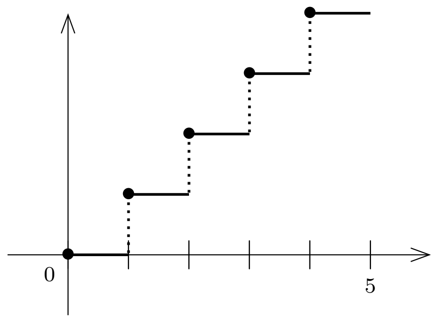
Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ne peut s'écrire comme produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice 8

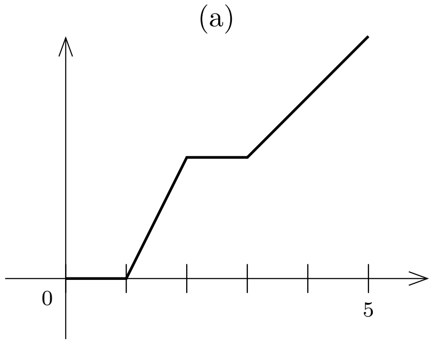
Les courbes suivantes sont-elles des graphes d'applications de $[0, 5]$ dans $\mathbb{R}$?



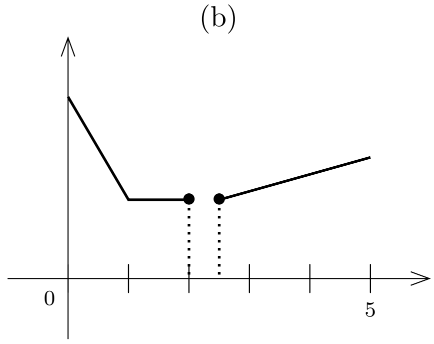
(a)



(b)



(c)



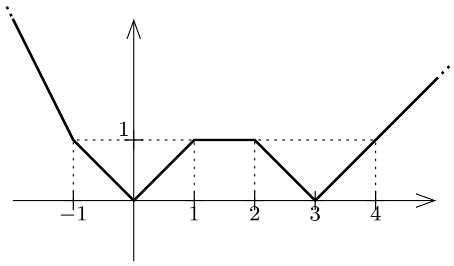
(d)

Exercice 9

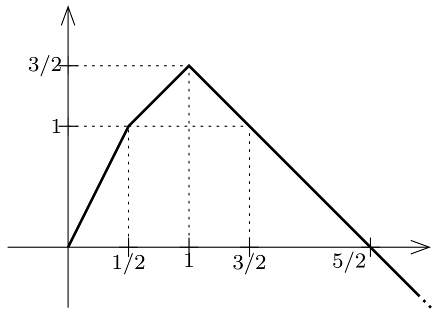
On considère les applications suivantes :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$,
$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$,
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2 + 2$,
$i : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$,
$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
Dessiner les graphes de ces applications. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 10

On considère les deux fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dont les graphes sont représentés ci-dessous :



Graphe de f



Graphe de g

1) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
2) Par lecture du graphe, déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f([2,4])$.
3) L'application g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
4) Par lecture du graphe, déterminer $g([1/2, 3/2])$ et $g^{-1}([0,1])$.

Exercice 11

On considère l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-5}{x+2}. \end{array}$$

1) Montrer que f est injective.
2) Trouver un réel a ne possédant pas d'antécédents par f. On note g l'application obtenue à partir de f en restreignant l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.
3) Montrer que g est bijective.
4) Ecrire la bijection réciproque de g.

Exercice 12

Soient les applications

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{et} \quad g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 13

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = (x+y, x-y)$ et $g(x,y) = xy - x^2$.
1) Montrer que f est bijective.
2) Exhiber une application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $g \circ h = Id_{\mathbb{R}}$. L'application g est-elle surjective ?
3) L'application g est-elle injective ? Existe-t-il une application $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $i \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$?

Exercice 14

Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$.
1) Démontrer les formules suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
6. $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

2) La formule $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.
3) La formule $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.

Exercice 15

1) Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.
2) Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
3) Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
4) Reprendre les questions précédentes avec « injective » au lieu de « surjective ».

Exercice 16

On définit deux applications f et g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 2x-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces applications sont-elles égales ?

Exercices à chercher

Exercice 17

Soit E un ensemble et A, B des parties de E.
1) Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cup X = B$ (on pourra commencer par remarquer que si A n'est pas inclus dans B, de telles parties n'existent pas ; il reste à examiner le cas où A est inclus dans B ; on pourra s'aider de patates).
2) Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cap X = B$.

Exercice 18

Soient E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ une application, telle que pour toutes parties disjointes A, B de X on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.
1) Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
2) Montrer que pour toutes parties A, B de X on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Exercice 19

Le but de cet exercice est de montrer que « l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas ».

Énoncé de l'exercice : Il s'agit de montrer que l'existence d'un ensemble dont les éléments sont tous les ensembles aboutit à une contradiction. Supposons qu'il existe un tel ensemble X. En considérant l'ensemble $y = \{x \in X,\ x \notin x\}$, aboutir à la contradiction cherchée (indication : y appartient-il à y ? cf. également le paradoxe du barbier ci-dessous). Ainsi l'ensemble X ne peut pas exister.

Commentaires : La découverte de ce « paradoxe » par le logicien Bertrand Russel en 1901 a permis par la suite de dégager de « bons » axiomes pour la formalisation de la théorie des ensembles. Une version « grand public » de ce paradoxe est connue sous le nom de *paradoxe du barbier* : le barbier du village est celui qui rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seulement ; le barbier se rase-t-il lui même ?