UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique

Feuille n° 1 : éléments de logique

Exercices à savoir faire

Exercice 1

Donner les tables de vérité des fonctions propositionnelles suivantes et indiquer, le cas échéant, si ce sont des tautologies :

1) $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{P}$ (principe du tiers exclu) ;

2) non $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\text{non } \mathcal{P})$ et $(\text{non } \mathcal{Q}))$;

3) $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } (\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}))$;

4) $((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$ (transitivité de la relation d'implication) ;

Exercice 2

1) L'affirmation « je suis arrivé(e) à la gare avant 10h » est-elle une condition nécessaire (suffisante, nécessaire et suffisante) pour « je suis monté(e) dans le train de 9h30 » ?

2) Donner une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement plus grand que 10.

3) Donner une condition nécessaire et non suffisante pour qu'un nombre entier soit divisible par 6.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble E formé des entiers naturels non nuls n inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient l'énoncé : « *Si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier.* »

Exercice 4

Considérons l'affirmation suivante : « s'il pleut ce matin, je prends mon parapluie ». À quelle affirmation parmi les suivantes correspond sa contraposée ?

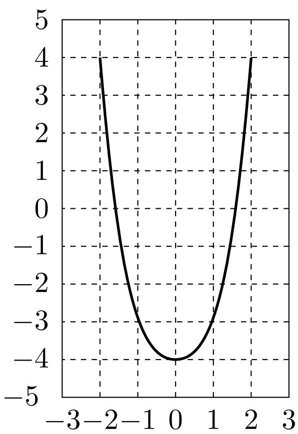
1) « J'ai pris mon parapluie, donc il a plu ce matin » ;

2) « Je n'ai pas pris mon parapluie, donc il ne pleuvait pas ce matin » ;

3) « Il a fait beau, donc je n'ai pas pris mon parapluie ».

Exercice 5

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2, 2]$.



Cette fonction vérifie-t-elle les propositions suivantes ?

1. $\exists x \in [-2, 2],\ \ f(x) \geq -2$
2. $\forall x \in [-2, 2],\ \ f(x) \geq -5$
3. $\exists x \in [-2, 2], f(x) = -5$
4. $\exists x \in [-2, 2], f(x) = -4$
5. $\forall x \in [-2, 2],\ \ f(x) = f(-x)$
6. $\forall y \in [-4, 4], \exists x \in [-2, 2],\ \ y = f(x)$

Exercice 6

On considère les formules suivantes :

(P_1) $\forall x \in \mathbf{R}, (x < 1 \Longrightarrow x \geq 1)$

(P_2) $\forall x \in \mathbf{R}, (x < 1 \Longrightarrow x < 3)$

1) Écrire la négation de chacune de ces formules.

2) Pour chacune de ces formules, indiquer en justifiant si l'assertion considérée est vraie ou fausse.

Exercice 7

1) Une histoire de clefs
a) Quelle que soit la porte, il existe une clef qui l'ouvre.
b) Il existe une clef qui ouvre toutes les portes.
À quelle proposition correspond la clef appelée « passe-partout » ?
2) Une histoire d'entiers
a) Quel que soit l'entier naturel, il existe un entier qui soit son double.
b) Il existe un entier égal au double de tous les autres.
Traduire ces énoncés en formules mathématiques qui utilisent des quantificateurs. Ces énoncés sont-ils vrais ou faux ? Justifiez votre réponse.

Exercice 8

On considère les formules suivantes :
(P_1) $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\quad x + y > 0$
(P_2) $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\quad x + y > 0$
(P_3) $\exists x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\quad x + y > 0$
(P_4) $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\quad x + y > 0$
(P_5) $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\quad y^2 > x$
1) Écrire la négation de chacune de ces formules.
2) Pour chacune de ces formules, indiquer (en le justifiant) si l'assertion considérée est vraie ou fausse.

Exercice 9

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère les énoncés suivants :

1. Pour tout réel x, $f(x)$ est supérieur à 1.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe un réel positif x tel que $f(x)$ est positif.
5. L'application f est paire.
6. Il existe un réel x tel que pour tout réel y strictement supérieur à x, $f(x)$ est strictement supérieur à $f(y)$.

1) Traduire ces énoncés en formules mathématiques qui utilisent des quantificateurs.
2) Pour chacune des formules obtenues, écrire sa négation.
3) Pour chacun de ces énoncés, donner au moins deux exemples d'applications f qui le vérifient, et au moins deux exemples d'applications f qui ne le vérifient pas.

Exercice 10

Traduire la formule suivante en une phrase (en français) qui ne comportera pas de symboles mathématiques.

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \forall n' \in \mathbf{N}\,, (n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0) \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N}, \exists q \in \mathbf{N}, \exists q' \in \mathbf{N}\,, (y = q\,n \text{ et } y = q'\,n' \text{ et } y \neq 0).$$

Exercice 11

1) Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé : pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est multiple de 3. Soit n un entier naturel. Par exemple $n = 4$. On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4\,(4^2 - 1) = 4 \times 15 = 4 \times 3 \times 5$ qui est bien multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».
2) Que pensez-vous du raisonnement : « Démontrons l'énoncé suivant : il existe un entier naturel n tel que $n^2 - n$ n'est pas multiple de 3. Si $n = 2$, on a $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ qui n'est pas multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

Exercice 12

Démontrer par contraposition la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R},\ x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$.

Exercice 13

Démontrer en utilisant un raisonnement par l'absurde qu'il n'y a pas de plus petit nombre rationnel strictement positif.

Exercice 14

Soit n un entier naturel. Démontrer que, si n^2 est pair, alors n est pair. On donnera deux démonstrations : une par l'absurde et une par contraposée.

Exercice 15

Démontrer par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 16

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, si $10^n + 7$ est multiple de 9, alors $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17

1) Montrer, par récurrence sur n, les formules

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) Que vaut, si n est impair, la somme $1 + 3 + \cdots + n$?
3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 18

1) Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 19

Lire attentivement la démonstration par récurrence de l'affirmation suivante : « tous les crayons de couleur d'une même boîte B sont de la même couleur ». Soit B une boîte de crayons de couleurs. Si cette boîte contient un crayon, alors l'énoncé est vrai. Supposons que le résultat soit vrai si B a $n-1$ crayons. Si B a maintenant n crayons, en en retirant un, on obtient une boîte B' ayant $n-1$ crayons. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous les $n-1$ de la même couleur c. Remettons le crayon retiré à nouveau dans B. Si l'on en retire un autre, on obtient une nouvelle boîte B'', dont tous les crayons ont même couleur d. Comme des crayons appartiennent à la fois à B' et B'', tous les crayons de B possèdent la même couleur $c = d$.

Que pensez-vous de cette démonstration ?

Exercices à chercher

Exercice 20

À l'aide d'une table de vérité, montrer que les formules « $\mathcal{P}$ ou ($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) » et « ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R}$) » sont équivalentes.

Exercice 21

On considère un jeu de cartes où chaque carte a une lettre sur une face et un nombre sur l'autre face. Quatre cartes sont disposées sur la table :

A	D	4	7

Quelle(s) carte(s) est-il nécessaire de retourner pour savoir si la règle « *S'il y a un A sur une face, alors il y a un 4 sur l'autre face.* » est respectée ?

Exercice 22

Soient x, y et z trois réels parmi lesquels il y a zéro et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose que les trois implications suivantes sont vraies :
P_1 : $x = 0 \Rightarrow y > 0$
P_2 : $x > 0 \Rightarrow y < 0$
P_3 : $y \neq 0 \Rightarrow z > 0$.
Comparer x, y et z.

Exercice 23

Les ensembles définis ci-dessous sont dans chaque cas un intervalle. Trouver ces intervalles.

1) $E = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\}$

2) $F = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1\}$

Exercice 24

Démontrer par contraposée, puis par l'absurde, l'énoncé suivant : soit x un réel positif tel que, pour tout réel $y > 0$, on a $x \leq y$. Alors $x = 0$.

Exercice 25

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

Exercice 26

Pour tout entier naturel $\mathbf{N}$, on note P_n la formule $2^n > n^2$.
1) Montrer que la formule $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
2) Pour quelles valeurs de l'entier n, P_n est-elle vraie ?

Exercice 27

Montrer, par récurrence sur n, la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbf{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 28

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour $n \geq 0$.
1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq n^2$.
2) On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Exprimer v_n en fonction de n, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
3) Calculer u_n en fonction de n.