


ARA: Algèbre et Arithmétique
Examen Terminal du 18 décembre 2014

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées.**

Exercice 1

Soient E un ensemble, et A, B, C trois parties de E . Montrer que

$$(A \subset (B \cap C) \text{ et } (B \cup C) \subset A) \implies A = B = C$$

Exercice 2

1) Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{y+1}. \end{aligned}$$

(i) L'application f est-elle surjective ?

(ii) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{2\})$. L'application f est-elle injective ?

2) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, -2x - 3y) \end{aligned}$$

est bijective. Que vaut g^{-1} ?

Exercice 3

1) Calculer le pgcd et le ppcm de 175 et 495.

2) Trouver deux entiers u_0 et v_0 tels que :

$$175u_0 + 495v_0 = 5$$

3) Expliciter l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation

$$175u + 495v = 5$$

- 4) Expliciter l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation

$$175u + 495v = 157$$

Exercice 4

- 1) Trouver le reste dans la division euclidienne de 2^{89} par 5, puis de 3^{789} par 5.
- 2) Soit n un entier naturel, trouver en fonction de n , le reste dans la division euclidienne de 2^n par 5, puis de 3^n par 5.
- 3) Pour quelles valeurs de n , l'entier 5 divise-t-il le nombre $16558^n + 320547^n$?

Exercice 5

Soit n un entier naturel.

- 1) Décomposer en produit de nombres premiers le nombre 360.
- 2) Montrer que 9 divise $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$.
- 3) Montrer que 8 divise $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$.
- 4) Montrer que 360 divise $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$.