

**Arithmétique***Contrôle continu 1*

Vous disposez de **40 minutes** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées.** Cet énoncé comporte 3 pages.

Exercice 1

Soient p, q deux variables propositionnelles. Montrer que la formule du calcul propositionnel suivante :

$$(\text{non } q) \Rightarrow p$$

est équivalente à deux des huit formules suivantes (séparées par les points-virgules) : $p \Rightarrow q$; $(\text{non } p) \Rightarrow (\text{non } q)$; $(\text{non } p) \Rightarrow q$; $p \Rightarrow (\text{non } q)$; p ou $(\text{non } q)$; $(\text{non } p)$ et $(\text{non } q)$; q ou p ; q et p .

Exercice 2

Nous considérons la formule mathématique suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N} \forall p \in \mathbf{N} (n \geq 2 \text{ et } p \geq 8) \Rightarrow p|(n^p - n). \quad (1)$$

- a) Écrire la négation de la formule (1).
- b) Montrer que la formule (1) est non valide. *Pour obtenir les points de cette question, il vous faudra fournir une preuve complète et correcte de sa négation.*

Exercice 3

Montrer la formule suivante par récurrence sur l'entier n :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^n 2k = n(n+1).$$