UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Contrôle continu
vendredi 7 novembre 2014

Les documents de cours, calculatrices et téléphone portables ne sont pas autorisés.
Le sujet comporte six exercices.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *(2.5 points)*

Montrer que la proposition suivante est vraie.

$$\forall a \in \mathbf{Z},\ \forall b \in \mathbf{Z}, ab \text{ pair ou } a^2 - b^2 \text{ multiple de } 8.$$

Exercice 2 *(2.5 points)*

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Exercice 3 *(2.5 points)*

Soient n et p deux entiers naturels tels que $2 \leq p \leq n$. Montrer l'égalité

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

1. par le calcul ;
2. par une interprétation combinatoire. (*Indication : considérer un ensemble fini E de cardinal n et deux éléments distincts de E*)

Exercice 4 *(2.5 points)*

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application quelconque. On se donne $A \subset E$ et $B \subset F$.
1. Énoncer les définitions d'image directe et d'image réciproque.
2. Prouver que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 5 *(5 points)*

1. Rappeler la définition d'un ensemble fini et de son cardinal.

On lance une pièce n fois. On associe à chaque tirage un élément de $\{P,F\}^n$.
Par exemple, si $n=4$, l'élément (P,P,F,F) de $\{P,F\}^4$ correspond à « *pile aux deux premiers lancers et face aux deux derniers* ».
On souhaite calculer le nombre de tirages p_n possibles pour lesquels on n'a pas obtenu "pile" deux fois consécutivement.
On pose

$$E_n = \Big\{(a_1,\cdots,a_n) \in \{P,F\}^n \mid \forall i \in \{1,\cdots,n-1\}, (a_i,a_{i+1}) \neq (P,P)\Big\},$$

de sorte que $p_n = \mathrm{Card}(E_n)$.
2. Calculer p_1 et p_2 en déterminant E_1 et E_2.
3. On note $F_n = \{(a_1,\cdots,a_n) \in E_n \mid a_1 = P\}$ et $G_n = \{(a_1,\cdots,a_n) \in E_n \mid a_1 = F\}$.
(i) Donner la définition d'une partition d'un ensemble en deux parties et montrer que F_n et G_n forment une partition de E_n.
(ii) Prouver que $(a_1,\cdots,a_n) \in F_n$ si, et seulement si, $a_1 = P$ et $a_2 = F$ et $(a_3,\cdots,a_n) \in E_{n-2}$.
(iii) Définir une bijection entre F_n et E_{n-2} et en déduire le cardinal de F_n.
(iv) Prouver que $(a_1,\cdots,a_n) \in G_n$ si, et seulement si, $a_1 = F$ et $(a_2,\cdots,a_n) \in E_{n-1}$. En déduire que $\mathrm{Card}(G_n) = p_{n-1}$.
(v) En déduire que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ et calculer p_5.

Exercice 6 *(5 points)*

Le but de cet exercice est de construire, dans un cas particulier, l'application bijective dont le théorème de Cantor-Bernstein (1896) affirme l'existence. Ce théorème s'énonce ainsi : étant donnés deux ensembles E et F, et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ toutes deux **injectives**, il existe toujours une application $\Phi : E \to F$ qui est **bijective**.

On suppose que $E = \mathbf{N}$ et $F = 2\mathbf{N}$, où $2\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs, et que les applications f et g sont définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 2x+4 \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2}+2 \end{array} \right.$$

1. Montrer que les applications f et g sont injectives. Sont-elles surjectives ?

On définit l'ensemble X par

$$X = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists i \in \mathbf{N},\ n = 4i \text{ ou } n = 4i+1\}$$

2. Déterminer $f(X)$. Montrer que l'application v suivante est bijective :

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & f(X) \\ x & \to & f(x). \end{array} \right.$$

3. Montrer que $g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$.
4. Montrer que l'application u suivante est bijective :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} F \setminus f(X) & \to & E \setminus X \\ y & \to & g(y). \end{array} \right.$$

5. Construire alors une application $\Phi : E \to F$ qui soit bijective.