UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Arithmétique 1

Examen terminal – 2 heures – Session 1

Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées**.

Exercice 1

1. Compléter la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \Rightarrow (P \wedge Q)$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$

   Indiquer, en le justifiant, si la proposition

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$$

   est ou non une tautologie du calcul propositionnel.

2. On considère la formule mathématique P suivante

$$\forall x \in \mathbb{R} \left[\left(\forall \varepsilon > 0 \; |x^2 - 9| < \epsilon \right) \Rightarrow x = 3 \right].$$

   Nier la proposition mathématique P et indiquer, en le justifiant, si la proposition P est vraie ou fausse.

Exercice 2

Soit E un ensemble. Soient $A, B, C \subset E$ trois parties de E. Montrer la formule suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A \cap B & = & A \cup C \\ & \text{et} & \\ A \cup B & = & A \cap C \end{array} \right. \Rightarrow A = B = C.$$

Exercice 3

Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ deux applications et $g \circ f\colon E \to G$ l'application composée.

1. Rappeler par une formule mathématique ce que signifie l'hypothèse « l'application f est surjective ».
2. Redémontrer que f non injective implique que $g \circ f$ n'est pas injective.
3. On suppose que $E = F = G = \mathbb{N}$ et que les applications f, g sont données, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f(n) = 2n$ et

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g puis déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 4

Montrer que l'entier $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11 pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Exercice 5

Soit p un nombre premier.

1. Que peut-on dire si p divise ab avec $a, b \in \mathbb{Z}$?
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \not\equiv 1 \mod p$ et que $a^3 \equiv 1 \mod p$. Montrer que $1 + a + a^2 \equiv 0 \mod p$ puis que $(a+1)^6 \equiv 1 \mod p$.

Exercice 6

1. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $437x + 241y = 1$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que $5x \equiv 2 \mod 9$ si et seulement si $x \equiv 4 \mod 9$.

   (b) Déterminer tous les entiers relatifs $x \in \mathbb{Z}$ qui sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 11 \\ 5x & \equiv 2 \mod 9. \end{cases}$$