UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Examen terminal
mercredi 17 décembre 2014

Les documents de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le sujet comporte six exercices.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *3 points*

Soient p et q deux entiers naturels. On considère la proposition P :

$$pq \text{ est divisible par } 6 \Longrightarrow (p \text{ divisible par } 6 \text{ ou } q \text{ divisible par } 6).$$

1. Écrire la contraposée de cette proposition.
On considère maintenant la proposition Q :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N},\ pq \text{ est divisible par } 6 \Longrightarrow (p \text{ divisible par } 6 \text{ ou } q \text{ divisible par } 6).$$

2. Écrire la négation de cette proposition Q.
3. La proposition Q est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Exercice 2 *3 points*

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application quelconque. On se donne enfin $A \subset E$ et $B \subset F$.
1. Énoncer les définitions d'image directe et d'image réciproque.
2. Prouver que $f^{-1}(B) \cap A \subset f^{-1}(B \cap f(A))$. Montrer qu'on n'a pas toujours égalité.

Exercice 3 *3 points*

1. L'entier 193 est-il premier ?
2. Énoncer le théorème de décomposition des entiers naturels en produit de facteurs premiers.
3. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{1737}$ n'est pas un entier.
4. Énoncer le petit théorème de Fermat.
5. Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{384} par 193 ?

Exercice 4 *3 points*

On définit une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(n) = \text{pgcd}(42, n)$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$ et $f(5)$. L'application f est-elle injective ?

2. L'application f est-elle surjective ? Déterminer $f(\mathbb{N})$.

Exercice 5 *5 points*

1. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système S_1

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & \equiv & 7 & \pmod{17} \\ x & \equiv & 8 & \pmod{19} \end{array}\right. \qquad (S_1)$$

2. L'entier 5 admet-il un inverse modulo 17 ? Si oui, le déterminer.

3. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système S_2

$$\left\{\begin{array}{rcll} 5x & \equiv & 1 & \pmod{17} \\ x & \equiv & 8 & \pmod{19} \end{array}\right. \qquad (S_2)$$

4. Montrer que le système S_3 n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}$

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & \equiv & 1 & \pmod{21} \\ x & \equiv & 9 & \pmod{28} \end{array}\right. \qquad (S_3)$$

Exercice 6 *6 points*

Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble X des nombres premiers congrus à 3 modulo 4, c'est-à-dire de la forme $4i + 3$ avec $i \in \mathbf{N}$, est infini.

1. Montrer que l'ensemble X est non vide.

2. Soit p un entier premier impair. Montrer que ($p \equiv 1 \pmod 4$ ou $p \equiv 3 \pmod 4$).

3. Soit n un entier naturel. Montrer que, si n est congru à 3 modulo 4, alors n admet un diviseur premier congru à 3 modulo 4. (*On pourra utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers de n, puis un raisonnement par l'absurde.*)

4. Supposons que X est fini et s'écrit donc $X = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ et posons

$$a = 4p_1p_2\cdots p_k - 1 = 4\prod_{j=1}^{k} p_j - 1.$$

Montrer, à l'aide d'une question précédente, que a admet un diviseur premier dans la liste $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ et aboutir à une contradiction.

5. Conclure.