Un autre exemple :

$$F = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}.$$

La décomposition aura la forme

$$F = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X+1}.$$

Les coefficients a et c se calculent par la méthode de la proposition 3.7. On a $a = \frac{1}{1} = 1$, $c = \frac{5}{1} = 5$. Pour b, on peut multiplier par X des deux côtés et faire tendre X vers $+\infty$. On obtient $3 = b + 5$, d'où $b = -2$. Finalement

$$F = \frac{1}{X^2} + \frac{-2}{X} + \frac{5}{X+1}.$$

En faisant $X = 1$, on obtient bien $\frac{3}{2}$ des deux côtés.

On peut calculer la partie polaire de F relative à un pôle a en amenant ce pôle en 0 par la substitution de $a + Y$ à X et en utilisant la division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Théorème 3.8 (Division des polynômes suivant les puissances croissantes) *Soient A et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $S(0) \neq 0$. Soit n un entier naturel. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que*

$$A = S\,Q + X^{n+1}R \quad \text{et} \quad \deg(Q) \leq n\ .$$

Le polynôme Q est le ***quotient de la division suivant les puissances croissantes de A par S à l'ordre*** *n. Le reste de cette division est $X^{n+1}R$.*

Proposition 3.9 *Supposons que a soit pôle de F d'ordre α : $F = \frac{A}{(X-a)^\alpha S}$ avec $A(a) \neq 0$ et $S(a) \neq 0$. Soit*

$$A(a+Y) = S(a+Y) \times (c_1 Y^{\alpha-1} + c_2 Y^{\alpha-2} + \cdots + c_\alpha) + Y^\alpha R$$

la division de $A(a+Y)$ par $S(a+Y)$ suivant les puissances croissantes de Y à l'ordre $\alpha - 1$. Alors la partie polaire de F relative au pôle a est

$$\frac{c_1}{X-a} + \frac{c_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{c_\alpha}{(X-a)^\alpha}\ .$$

En pratique, on n'utilise cette méthode de la division selon les puissances croissantes que pour les pôles d'ordre élevé (au moins 3). On utilise souvent d'autres outils de détermination : donner une valeur particulière à l'indéterminée X (ce qui est toujours recommandé pour vérifier les calculs), multiplier par X et “faire tendre X vers $+\infty$”, utiliser des propriétés de parité...

Exemple : Soit

$$F = \frac{2X^5 + 10X^3 + 12X}{(X+1)^3(X-1)^3}.$$

La décomposition va être de la forme

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}.$$

Pour déterminer la partie polaire relative au pôle 1, on fait le changement de variable $X = 1+Y$ avant de faire la division suivant les puissances croissantes. Comme on veut faire une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2, on peut oublier les puissances de Y plus grandes que 2 :

$$F(1+Y) = \frac{2(1+Y)^5 + 10(1+Y)^3 + 12(1+Y)}{((1+Y)+1)^3((1+Y)-1)^3} = \frac{24 + 52Y + 50Y^2 + \cdots}{Y^3(8 + 12Y + 6Y^2 + \cdots)}.$$

Ensuite on fait la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $24+52Y+50Y^2+\cdots$ par $8 + 12Y + 6Y^2 + \cdots$. Comme on est seulement intéressé par le quotient, on oublie tout ce qui dépase le degré 2 :

$$\begin{array}{rrrr|l}
24 & +52Y & +50Y^2 & +\cdots & 8 + 12Y + 6Y^2 + \cdots \\ \cline{5-5}
 & 16Y & +32Y^2 & +\cdots & 3 + 2Y + Y^2 \\
 & & 8Y^2 & +\cdots & \\
 & & & \cdots &
\end{array}$$

et on a

$$F = \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}.$$

On pourrait recommencer pour obtenir la partie polaire relative au pôle -1, mais il vaut mieux raisonner en **utilisant la parité**. En changeant X en $-X$, on obtient

$$-F(X) = F(-X) = \frac{-3}{(X+1)^3} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{-1}{X+1} + \frac{-d}{(X-1)^3} + \frac{e}{(X-1)^2} + \frac{-f}{X-1}.$$

Finalement

$$F = \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X+1)^3} + \frac{-2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}.$$

3.4.3 Pratique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit maintenant $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$, toujours sous forme réduite,

$$B = (X-a_1)^{\alpha_1} \cdots (X-a_n)^{\alpha_n}((X-u_1)^2 + v_1^2)^{\beta_1} \cdots ((X-u_p)^2 + v_p^2)^{\beta_p}$$

la décomposition du dénominateur en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$\begin{aligned} F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_{i,1}}{X-a_i} + \cdots + \frac{c_{i,\alpha_i}}{(X-a_i)^{\alpha_i}} \right) + \\ \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{d_{j,1}X + e_{j,1}}{(X-u_j)^2 + v_j^2} + \cdots + \frac{d_{j,\beta_j}X + e_{j,\beta_j}}{((X-u_j)^2 + v_j^2)^{\beta_j}} \right), \end{aligned}$$

où les $c_{i,k}$ et les $d_{j,\ell}$ et $e_{j,\ell}$ sont des nombres réels. Les éléments simples de la forme $\dfrac{c}{(X-a)^k}$ s'appellent **éléments simples de première espèce**, ceux de la forme $\dfrac{dX+e}{((X-u)^2+v^2)^\ell}$ **éléments simples de deuxième espèce**. La décomposition en éléments simples est utile pour l'intégration des fonctions rationnelles.

Pour effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle à coefficients réels, on peut effectuer la décomposition sur $\mathbb{C}$ puis regrouper les parties polaires correspondant aux pôles conjugués $u_j + iv_j$ et $u_j - iv_j$, ce qui est facile si ces pôles sont simples. On peut utiliser d'autres méthodes.

Un exemple :

$$F = \frac{X(2X^4+3X^3+7X^2+4X+4)}{(X^2+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)}$$

On multiplie par X^2+1 et on fait $X = i$. On obtient

$$\frac{i(2-3i-7+4i+4)}{(-1+i+1)^2} = ai+b,$$

ce qui donne $a = 1$ et $b = 1$. On peut ensuite calculer c et d en multipliant par $(X^2+X+1)^2$ et en faisant $X = j$ (racine de X^2+X+1), puis trouver e et f en multipliant par X et en faisant tendre X vers $+\infty$, et en faisant $X = 0$. On peut aussi procéder ainsi :

$$\frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)} = F - \frac{X+1}{X^2+1} = \frac{X^3+X-1}{(X^2+X+1)^2}.$$

On fait la division euclidienne $X^3+X-1 = (X^2+X+1)(X-1)+X$, et on a finalement :

$$F = \frac{X(2X^4+3X^3+7X^2+4X+4)}{(X^2+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{X}{(X^2+X+1)^2} + \frac{X-1}{(X^2+X+1)}.$$

Exercice 3.12

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^6-2X^4+X^3+1$ par X^3+X^2+1 à l'ordre 6. Trouver le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $(X+1)^{10}$ par $(X-1)^7$ à l'ordre 2.

Exercice 3.13

Décomposition en éléments simples :

(a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ (b) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(c) $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$ (d) $\dfrac{X(X^6-1)}{(X^2-1)^3}$

(e) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$ (f) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$

(g) $\dfrac{X^2}{(X-1)^2(X+1)^3}$ (h) $\dfrac{X^2+1}{((X-1)(X-2)(X-3))^2}$

(i) $\dfrac{-12X}{X^6-14X^4+49X^2-36}$ (j) $\dfrac{1}{(X^3+3X^2+2X)^4}$

Exercice 3.14

Exemples de décomposition en éléments simples de première et de seconde espèces, dans $\mathbb{R}(X)$:

(a) $\dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^3}$ (b) $\dfrac{2X^5+19X^4+76X^3+157X^2+165X+72}{(X^2+4X+5)^3}$

(c) $\dfrac{X^6-2X^5+4X^4-6X^3-X^2+8X+121}{(X-1)^3(X^2+4)}$ (d) $\dfrac{1}{(X-1)^5X(X^2+1)}$

(e) $\dfrac{X^9}{(X^2-1)^3(X^2+X+1)^2}$ (f) $\dfrac{4(X^6+2)}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$

(g) $\dfrac{X}{(X^2-1)(X^2+1)^3}$

Exercice 3.15

Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X - X^3}{(1+X^4)(1+X^2)^4} \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}$$

Exercice 3.16

Décomposer sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3 - 4X^2 + 2X + 1}{(X^2+1)(X^2+4)} \quad \text{et} \quad \frac{X^5+5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}$$

Exercice 3.17

Décomposer sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X^{2n}-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^{2n+1}-1}$$

Exercice 3.18

Décomposer $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$ et $\dfrac{X^2}{(X+1)^3(X-1)^2}$.

Exercice 3.19

Décomposer $\dfrac{4X^2+X+4}{(X-1)(X+2)^2}$ et $\dfrac{X^6}{(X^2-5X+6)(X-1)^3}$.

Exercice 3.20

Décomposer $\dfrac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}$ et $\dfrac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$.

Exercice 3.21

Décomposer $\dfrac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$ et $\dfrac{(X^2+1)^2}{(X-1)^6}$.

Exercice 3.22

Décomposer $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$ et $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos a+1}$.