Chapitre 1

Polynômes

1.1 Généralités

Un polynôme à une variable sur un corps $\mathbb{K}$ (nous serons essentiellement intéressés par les cas où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une expression

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \ ,$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ (les *coefficients* du polynôme). Formellement, on peut définir un polynôme comme la suite infinie $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ de ses coefficients, tous nuls à partir d'un certain rang. Par exemple, le polynôme $1 + 2X^2 - X^3$ est codé par la suite $(1, 0, 2, -1, 0, 0, \ldots)$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$. Il est muni des deux opérations de l'addition et de la multiplication, qui en font un anneau commutatif, comme $\mathbb{Z}$.

On identifie un élément a de $\mathbb{K}$ au polynôme constant (codé $(a, 0, 0, \ldots)$). La multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ munit alors $\mathbb{K}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit P un polynôme non nul. Le *degré* de P est le plus grand entier n tel que le coefficient a_n de X^n dans P soit non nul. Ce coefficient a_n s'appelle alors le *coefficient dominant* de P, et on dit que P est *unitaire* si son coefficient dominant est 1. Par convention on peut décréter que le degré du polynôme nul est $-\infty$. On a

$$\begin{aligned} \deg(P+Q) &\leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \quad (\text{égalité si } \deg(P) \neq \deg(Q)) \\ \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q) \ . \end{aligned}$$

On dit qu'un polynôme B *divise* un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. Noter que le fait qu'à la fois B divise A et A divise B équivaut au fait qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que $A = cB$. Noter aussi que si B divise A et $\deg(A) < \deg(B)$, alors $A = 0$.

Soit $c \in \mathbb{K}$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un polynôme sur $\mathbb{K}$. On pose $P(c) = a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n$. On dit que c est *racine* de P quand $P(c) = 0$. L'application $c \mapsto P(c)$ de $\mathbb{K}$ dans lui-même est la *fonction polynôme* associée au polynôme P.

On peut *substituer* un polynôme Q à la variable X dans un autre polynôme P pour obtenir un nouveau polynôme $P(Q)$ (noté aussi quelquefois $P \circ Q$: si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, alors $P(Q) = a_0 + a_1 Q + \cdots + a_n Q^n$. On a $P_1(Q) + P_2(Q) = (P_1 + P_2)(Q)$ et $P_1(Q) \times P_2(Q) = (P_1 P_2)(Q)$.

Exercice 1.1

Calculer par récurrence $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdots(1+X^{2^n})$.

Exercice 1.2

Si P est un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et c un élément de $\mathbb{K}$, combien faut-il d'opérations (additions et multiplications) dans $\mathbb{K}$ pour calculer $P(c)$?

Combien faut-il d'opérations dans $\mathbb{K}$ pour multiplier deux polynômes de degré n ?

Exercice 1.3

Soient A, B, C, U, V des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si A divise B et C, il divise aussi $UB + VC$.

Exercice 1.4

Montrer que, si les trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ vérifient la relation

$$P^2(X) - XQ^2(X) = XR^2(X) ,$$

ils sont nuls (*faire jouer la parité du degré et les signes des coefficients dominants*). Est-ce encore vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 1.5

Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $P(X) = X(X + a)(X + 2a)(X + 3a) + a^4$ est un carré dans $\mathbb{K}[X]$. En déduire une décomposition de $Q(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 8$ en produit dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.6

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X) - X$ divise $Q\big(P(X)\big) - Q(X)$.
2. Montrer que $P(X) - X$ divise $P\big(P(X)\big) - X$.

Exercice 1.7

Montrer que l'application $P \mapsto P(X + a)$ est une bijection de $\mathbb{K}[X]$ sur lui-même. Quelle est la bijection réciproque ?