UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 2

Feuille d'exercices n°4

Fractions rationnelles - Décomposition en éléments simples

Exercice n°1

Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{X^3+4X^2+X-6}{X^4-X^3-5X^2-X-6} \qquad G = \frac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2}$$

Exercice n°2

Pour $F = \dfrac{A}{B} \in K[X]$, on pose $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$.
Montrer que $\deg(F)$ est bien défini (ne dépend pas du représentant choisi de la fraction rationnelle) et que $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$ et $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G))$.

Exercice n°3

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{1}{(X+1)(X+2)} \qquad G = \frac{2X-3}{(X-1)(X-2)} \qquad H = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$$

Exercice n°4 *Examen 2014*

On considère la fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ donnée par $F = \dfrac{24X^2-32}{(X-2)^2X^2(X+2)^2}$.

1) Étudier la parité de F.

2) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (justifier vos calculs).

3) Soit $N \geqslant 3$ un entier. Déduire de la décomposition précédente la valeur (en fonction de N) de la somme : $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{24n^2-32}{(n-2)^2n^2(n+2)^2}$.

Exercice n°5

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{X^3+X^2+2X+2}{X^2+1} \qquad G = \frac{3}{X^3+1} \qquad H = \frac{4X^3}{X^4-1}$$
$$I = \frac{2}{X(X-1)^2} \qquad J = \frac{X^2}{(X+1)^3} \qquad K = \frac{1}{X(X^2+X+1)^2}$$

Exercice n°6 *Examen deuxième session 2011*

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{(X-1)(X^2-1)(X^3-1)}$.

Exercice n°7 *Examen 2013*

On pose $P = X^5 - 8X^3 + 3X^2 + 4X + 12$, $Q = X^3 - 2X^2 + X - 2$ et $F = \dfrac{Q}{P}$.

1) Déterminer les racines rationnelles de P ainsi que leurs multiplicités.

2) En déduire une décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Calculer le PGCD unitaire D de P et Q.

4) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.

5) Question Bonus : En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^5 - 8x^3 + 3x^2 + 4x + 12}$

Exercice n°8

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{1}{X^5(1+X+X^2)} \qquad G = \frac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X-1)^3}$$
$$H = \frac{1}{X^3-1} \qquad I = \frac{1}{X^5+1}$$

Exercice n°9

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{3X^2+12X+11}{(X+1)(X+2)(X+3)} \quad G = \frac{3X^2+X+1}{(X-1)(X^2-4)} \quad H = \frac{X^3-3X-4}{(X^2+2)(X^2+X+1)}$$
$$I = \frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3} \quad J = \frac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)} \quad K = \frac{X^6}{(X^2-5X+6)(X-1)^3}$$
$$L = \frac{X^2-3X-2}{(X^2+X+1)^2(X+1)^2} \quad M = \frac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)}$$

Exercice n°10 *Examen 2010*

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^6 + X^{10}}$

Exercice n°11 *Examen 2015*

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1}{X^4(X^2+2)}$$

1) (1 point) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de cette fraction.

2) (3 points) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

Exercice n°12 *Deuxième session 2012*

On pose $P = X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 4X^2 + X + 2,\ Q = X^5 - X^3 - 2X^4 + 2X^2$ et $F = \dfrac{P}{Q}$.

1) Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de P ? Quelle est la multiplicité de -1 comme racine de P ?

2) Factoriser P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

3) Quel est le pgcd unitaire de P et Q ?

4) Mettre la fraction rationnelle F sous forme réduite.

5) Donner les pôles et les zéros de F, avec leurs ordres de multiplicité.

6) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°13 *Contrôle continu 2014*

On pose $P = X^3 - X^2 - 2X,\ Q = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ et $F = \dfrac{P}{Q}$.

1) Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de Q ? Quelle est la multiplicité de -1 comme racine de Q ? Quelle est la racine de Q qui manque ? En déduire la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le pgcd unitaire de P et Q.

3) Vérifier que $\dfrac{X(X-2)}{(X-1)^2(X+2)}$ est la forme réduite de F.

4) Donner les pôles et les zéros de F, avec leurs ordres de multiplicité.

5) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°14 *Examen 2016*

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles : $F = \dfrac{2X^2 - 1}{X^3 + 1}$ et $G = \dfrac{X + 2}{X^4(X^3 + 1)}$.

1) **a)** Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de F.
b) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

2) Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice n°15 *Deuxième session 2016*

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $F = \dfrac{X^2 + 1}{(X-3)^3(X^2 - 6X + 10)}$.

1) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de F.

2) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

3) Quelle est la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$?

Exercice n°16

Calculer les primitives suivantes en précisant dans chaque cas le domaine où elles sont définies :

Du tout venant

1) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}dx$ **2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+2}$ **3)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ **5)** $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^5-x}dx$ **6)** $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^4+3x^2+2}dx$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ **8)** $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3+x^2+x+1}$ **9)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

Cas des fonctions impaires

10) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^4+3x^2+2}$ **11)** $\displaystyle\int \frac{2dx}{x(x^2+1)^2}$ **12)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2+4)(x^2+9)}$

Cas des fonctions paires

13) $\displaystyle\int \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+4}dx$ **14)** $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}dx$ **15)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^2}$ **17)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ **18)** $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$

De plus en plus compliquées

19) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-1)^3}dx$ **20)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x-1)^2}$ **21)** $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

Exercice n°17

Calculer les primitives suivantes en précisant dans chaque cas le domaine où elles sont définies :

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\cos x}$ **2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3\sin x}$ **3)** $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{4\cos^2 x+9\sin^2 x}$

4) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos 3x}dx$ **5)** $\displaystyle\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$ **6)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\cos 2x}$ **8)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x+\cos 2x}dx$ **9)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$

10) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x+2\cos x+1}{2+\cos x}dx$ **11)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$ **12)** $\displaystyle\int \tan^2 x dx$