Feuille d'exercices n°4
Réponses (succintes)

Fractions rationnelles-Décomposition en éléments simples

Exercice 1. Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes :
$F = \dfrac{X^3+4X^2+X-6}{X^4-X^3-5X^2-X-6}$ $G = \dfrac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2}$

Réponse : La forme réduite de F est $\dfrac{(X+3)(X-1)}{(X-3)(X^2+1)}$

$G = \dfrac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2} = \dfrac{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}{(X+1)(X^2+X+2)}$ est déjà sous forme réduite.

Exercice 2. Pour $F = \dfrac{A}{B} \in K[X]$, on pose $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$.

Montrer que $\deg(F)$ est bien défini (ne de$_{\text{pend}}$ pas du représentant choisi de la fraction rationnelle) et que $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$ et $\deg(F+G) \leq \max(\deg(F),\ \deg(G))$.

Exercice 3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{1}{(X+1)(X+2)} \quad G = \frac{2X-3}{(X-1)(X-2)} \quad H = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$$

Réponse : $F = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)} = \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{X+2}$

$G = \dfrac{2X-3}{(X-1)(X-2)} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{X-2}$

$H = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \dfrac{5X+3}{(X-1)(X-2)} = 1 + \dfrac{-8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$

Exercice 4. (*Examen 2014*) On considère la fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ donnée par $F = \dfrac{24X^2-32}{(X-2)^2X^2(X+2)^2}$.

1) Étudier la parité de F.

2) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (justifier vos calculs).

3) Soit $N \geq 3$ un entier. Déduire de la décomposition précédente la valeur (en fonction de N) de la somme : $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{24n^2-32}{(n-2)^2n^2(n+2)^2}$.

Réponse :

1) $F(-X) = \dfrac{24(-X)^2-32}{(-X-2)^2(-X)^2(-X+2)^2} = \dfrac{24X^2-32}{(X+2)^2X^2(X-2)^2} = F(X)$, donc F est paire.

2) En utilisant la parité, on aura $F = \dfrac{a}{X-2} + \dfrac{b}{(X-2)^2} + \dfrac{c}{X^2} + \dfrac{-a}{X+2} + \dfrac{b}{(X+2)^2}$. En multipliant F par $(X-2)^2$ en faisant $X=2$ on obtient $b=1$, puis en multipliant F par X^2 en faisant $X=0$ on obtient $c=-2$. Finalement en calculant $F(1)$ dans les deux expressions on obtient $a=0$. Ainsi $F = \dfrac{1}{(X-2)^2} + \dfrac{-2}{X^2} + \dfrac{1}{(X+2)^2}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=3}^{N}\frac{24n^2-32}{(n-2)^2n^2(n+2)^2}=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n-2)^2}+\frac{-2}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}=\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{(n-2)^2}-\frac{1}{n^2}\right)-\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$

En posant $u_n=\left(\frac{1}{(n-2)^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, on aura $\displaystyle\sum_{n=3}^{N}\frac{24n^2-32}{(n-2)^2n^2(n+2)^2}=\sum_{n=3}^{N}u_n-u_{n+2}=u_3+u_4-u_{N+1}-u_{N+2}=1-\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{(N-1)^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)-\left(\frac{1}{(N^2}-\frac{1}{(N+2)^2}\right)=\frac{155}{144}-\frac{1}{N^2}-\frac{1}{(N-1)^2}+\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}$.

Exercice 5. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F=\frac{X^3+X^2+2X+2}{X^2+1}\quad G=\frac{3}{X^3+1}\quad H=\frac{4X^3}{X^4-1}$$

$$I\ =\frac{2}{X(X-1)^2}\quad J=\frac{X^2}{(X+1)^3}\quad K=\frac{1}{X(X^2+X+1)^2}$$

Réponse : $F=\frac{X^3+X^2+2X+2}{X^2+1}=(X+1)+\frac{X+1}{X^2+1}$

$G=\frac{3}{X^3+1}=\frac{1}{X+1}-\frac{X-2}{X^2-X+1}$

$H=\frac{4X^3}{X^4-1}=\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{2X}{X^2+1}$

$I\ =\frac{2}{X(X-1)^2}=\frac{2}{X}-\frac{2}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}$

$J=\frac{X^2}{(X+1)^3}=\frac{1}{X+1}-\frac{2}{(X+1)^2}+\frac{1}{(X+1)^3}$

$K=\frac{1}{X(X^2+X+1)^2}=\frac{1}{X}-\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$

Exercice 6. (*Examen deuxième session 2011*)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F=\frac{1}{(X-1)(X^2-1)(X^3-1)}$.

Réponse : La décomposition du dénominateur en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ est

$$(X-1)(X^2-1)(X^3-1)=(X-1)^3(X+1)(X^2+X+1).$$

La décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{R}$ sera donc de la forme

$$F=\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+1}+\frac{eX+f}{X^2+X+1},$$

où a, b, $\ldots$, f sont des nombres réels.

On calcule la partie polaire relative au pôle 1 en faisant le changement de variable $X=1+Y$ dans $(X+1)(X^2+X+1)$, ce qui donne $6+9Y+5Y^2+\cdots$, et en faisant la division, suivant les puissances croissantes de Y, de 1 par ce polynôme. Le quotient obtenu est

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{4}Y+\frac{17}{72}Y^2,$$

et donc la partie polaire de F relative au pôle 1 est

$$\frac{1}{6(X-1)^3}-\frac{1}{4(X-1)^2}+\frac{17}{72(X-1)},$$

On obtient ensuite d en multipliant F par $X+1$ et en faisant $X=-1$. On obtient $d=\dfrac{-1}{8}$. Pour déterminer e et f, on peut multiplier F par X^2+X+1 et faire $X=j$. Ceci donne (en se souvenant que $j^3=1$, $j^2+j+1=0$ et $\overline{j}=j^2$)

$$ej+f=\frac{1}{(j-1)^3(j+1)}=\frac{1}{(-3j^2+3j)(-j^2)}=\frac{1}{3j-3}=\frac{j^2-1}{3(j-1)(j^2-1)}=\frac{-j-2}{9},$$

d'où $e=-1/9$ et $f=-2/9$. Ainsi,

$$F=\frac{1}{6(X-1)^3}-\frac{1}{4(X-1)^2}+\frac{17}{72(X-1)}-\frac{1}{8(X+1)}-\frac{X+2}{9(X^2+X+1)}$$

Exercice 7. (*Examen 2013*)

On pose $P=X^5-8X^3+3X^2+4X+12$, $Q=X^3-2X^2+X-2$ et $F=\dfrac{Q}{P}$.

1) Déterminer les racines rationnelles de P ainsi que leurs multiplicités.
2) En déduire une décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3) Calculer le PGCD unitaire D de P et Q.
4) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur C.
5) Question Bonus : En déduire une primitive de $f: x\mapsto \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^5-8x^3+3x^2+4x+12}$

Réponse :

1. Les racines rationnelles de $P=X^5-8X^3+3X^2+4X+12$, sont de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux, $p>0$, p diviseur de 12 et q diviseur de 1. Les candidats sont donc $\pm1, \pm2, \pm3 \pm 4 \pm 6$. On vérifie que $P(2)=P'(2)=0$, 2 est donc racine de multiplicité 2 et que -3 est racine simple.
2. $P=(X+3)(X-2)^2(X^2+X+1)$ est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$. Les racines de X^2+X+1 sont j et $\overline{j}=j^2$ où $j=e^{2i\pi/3}$.
3. On vérifie que 2 est racine simple de Q, puis que la division de Q par $X-2$ donne X^2+1 qui est irréductible dans $\mathbb{R}$. D'où $Q=(X-2)(X^2+1)$. Ainsi le PGCD unitaire de P et Q est $D=X-2$.
4. $F=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{X^2+1}{(X+3)(X-2)(X^2+X+1)}$.
   Il n'y a pas de partie entière car le degré du numérateur de F est strictement plus petit que celui de son dénominateur. La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ aura donc la forme $F(X)=\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{X+3}+\dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$, où a, b, c, d sont des réels à déterminer. En évaluant $(X-2)F=\frac{X^2+1}{(X+3)(X^2+X+1)}$ en $X=2$, on trouve $a=\frac{1}{7}$ et en évaluant $(X+3)F=\frac{X^2+1}{(X-2)(X^2+X+1)}$ en $X=-3$ en trouve $b=-\frac{2}{7}$. On calcule c et d en multipliant F par X^2+X+1 et en faisant $X=j$, ce qui donne $cj+d=\dfrac{j^2+1}{j^2+j-6}=\dfrac{j}{7}$ d'où $c=\frac{1}{7}$ et $d=0$.
   En récapitulant, on obtient $F=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(X-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(X+3)}+\dfrac{1}{7}\dfrac{X}{X^2+X+1}$.
   La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ sera de la forme
   $F(X)=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(X-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(X+3)}+\dfrac{\alpha}{X-j}+\dfrac{\overline{\alpha}}{X+\overline{j}}$, où α est un nombre complexe à déterminer.
   On peut le trouver en évaluant $\dfrac{X^2+1}{(X+3)(X-2)(2X+1)}$ en $X=j$, ce qui donne $\alpha=\dfrac{j^2+1}{(j^2+j-6)(2j+1)}=\dfrac{j}{7(2j+1)}=\dfrac{j}{7(j-j^2)}=\dfrac{1}{7(1-j)}$.
   On obtient ainsi $F=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(X-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(X+3)}+\dfrac{1}{7(1-j)}\dfrac{1}{(X-j)}+\dfrac{1}{7(1-j)}\dfrac{1}{(X-j^2)}$

5. Une primitive de $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^5-8x^3+3x^2+4x+12} = \dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(x-2)} - \dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(x+3)} + \dfrac{1}{7}\dfrac{x}{x^2+x+1}$ est donnée par $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{7}\ln|x-2| - \frac{2}{7}\ln|x+3| + \frac{1}{14}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 8.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{1}{X^5(1+X+X^2)} \quad G = \frac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X-1)^3}$$

$$H = \frac{1}{X^3-1} \quad I = \frac{1}{X^5+1}$$

Réponse : $F = \dfrac{1}{X^5(1+X+X^2)} = \dfrac{-1}{X} + \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{-1}{X^4} + \dfrac{1}{X^5} - \dfrac{X}{1+X+X^2}$.

$G = \dfrac{X^2+X+1}{(X^2+1)(X-1)^3} = \dfrac{X+1}{4(X^2+1)} - \dfrac{1}{4(X-1)} - \dfrac{3}{2(X-1)^3}$.

$H = \dfrac{1}{X^3-1} = \dfrac{1}{3(X-1)} + \dfrac{-X-2}{3(X^2+X+1)}$.

On a $X^5+1 = (X+1)(X-e^{i\frac{\pi}{5}})(X-e^{-i\frac{\pi}{5}})(X-e^{i\frac{3\pi}{5}})(X-e^{-i\frac{3\pi}{5}})$ d'où

$X^5+1 = (X+1)(X^2-2X\cos(\frac{\pi}{5})+1)(X^2-2X\cos(\frac{3\pi}{5})+1)$.

On obtient $I = \dfrac{1}{X^5+1} = \dfrac{1}{5(X+1)} - \dfrac{2}{5}\dfrac{X\cos(\frac{\pi}{5})-1}{X^2-2X\cos(\frac{\pi}{5})+1} - \dfrac{2}{5}\dfrac{X\cos(\frac{3\pi}{5})-1}{X^2-2X\cos(\frac{3\pi}{5})+1}$.

Exercice 9.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$F = \dfrac{3X^2+12X+11}{(X+1)(X+2)(X+3)} \quad G = \dfrac{3X^2+X+1}{(X-1)(X^2-4)} \quad H = \dfrac{X^3-3X-4}{(X^2+2)(X^2+X+1)}$

$I = \dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3} \quad J = \dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)} \quad K = \dfrac{X^6}{(X^2-5X+6)(X-1)^3}$

$L = \dfrac{X^2-3X-2}{(X^2+X+1)^2(X+1)^2} \quad M = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)}$.

Réponse : $F = \dfrac{3X^2+12X+11}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{X+2} + \dfrac{1}{X+3}$.

$G = \dfrac{3X^2+X+1}{(X-1)(X^2-4)} = -\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{11}{12}\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{15}{4}\dfrac{1}{x-2}$.

$H = \dfrac{X^3-3X-4}{(X^2+2)(X^2+X+1)} = \dfrac{3X-2}{(X^2+2)} + \dfrac{-2X-1}{(X^2+X+1)}$.

$I = \dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3} = x-3+\dfrac{3X+5}{(X^2+X+1)} + \dfrac{-4X-2}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{X}{(X^2+X+1)^3}$.

$J = \dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)} = 1 + \dfrac{1}{(X-1)} + \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{3}{(X-1)^3} - \dfrac{1}{(X-2)}$.

$K = \dfrac{X^6}{(X^2-5X+6)(X-1)^3} = x+8+\dfrac{103}{8(X-1)} + \dfrac{15}{4(X-1)^2} + \dfrac{1}{2(X-1)^3} + \dfrac{729}{8(X-3)} - \dfrac{64}{(X-2)}$.

$L = \dfrac{X^2-3X-2}{(X^2+X+1)^2(X+1)^2} = -\dfrac{1}{(X+1)} + \dfrac{2}{(X+1)^2} + \dfrac{X-2}{(X^2+X+1)} + \dfrac{3X-1}{(X^2+X+1)^2}$.

$M = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)} = \dfrac{5}{8(X-1)} - \dfrac{1}{4(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X-1)^3} + \dfrac{1}{(X-1)^4} - \dfrac{1}{24(X+1)} + \dfrac{-2X+1}{3(X^2-X+1)}$.

Exercice 10. (*Examen 2010*)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^6 + X^{10}}$

Réponse : Posons $F = \dfrac{1}{X^6 + X^{10}} = \dfrac{1}{X^6(1 + X^4)}$. La partie polaire relative au pôle 0 se trouve en faisant la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1 + X^4$ à 1'ordre 5, dont le quotient est $1 - X^4$. On a donc

$$F = \frac{1}{X^6} - \frac{1}{X^2} + \frac{X^2}{1 + X^4}$$

Les racines complexes de $X^4 + 1$ sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-i\pi/4}$, $e^{-3i\pi/4}$. On cherche la décomposition en éléments simples

$$\frac{X^2}{1 + X^4} = \frac{a}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{b}{X - e^{3i\pi/4}} + \frac{c}{X - e^{-i\pi/4}} + \frac{d}{X - e^{-3i\pi/4}}$$

Par conjugaison, on sait que $c = \overline{a}$ et $d = \overline{b}$. Comme les pôles sont simples, on obtient a et b en évaluant $\dfrac{X^2}{4X^3} = 14x$ en $e^{i\pi/4}$ et $e^{3i\pi/4}$ respectivement, d'où $a = e^{-i\pi/4}/4$ et $b = e^{-3i\pi/4}/4$. Ainsi

$$F = \frac{1}{X^6} - \frac{1}{X^2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{4(X - e^{i\pi/4})} + \frac{e^{-3i\pi/4}}{4(X - e^{3i\pi/4})} + \frac{e^{i\pi/4}}{4(X - e^{-i\pi/4})} + \frac{e^{3i\pi/4}}{4(X - e^{-3i\pi/4})}$$

En regroupant les morceaux conjugués, on obtient $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$ et la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$F = \frac{1}{X^6} - \frac{1}{X^2} + \frac{\sqrt{2}X}{4(X^2 - \sqrt{2}X + 1)} - \frac{\sqrt{2}X}{4(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}$$

Exercice 11. (*Examen 2015*)

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante : $F = \dfrac{1}{X^4(X^2 + 2)}$

1) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de cette fraction.

2) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

Réponse :

1) La décomposition théorique de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{1}{X^4(X^2 + 2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X^4} + \frac{eX + f}{(X^2 + 2)}$$

On peut aussi remarquer que F est paire et par conséquent $a = c = e = 0$.

2) Le calcul des coefficients nous donne

$$\frac{1}{X^4(X^2 + 2)} = -\frac{1}{4X^2} + \frac{1}{2X^4} + \frac{1}{4(X^2 + 2)}$$

Exercice 12. (*Deuxième session 2012*)

On pose $P = X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 4X^2 + X + 2$, $Q = X^5 - X^3 - 2X^4 + 2X^2$ et $F = \dfrac{P}{Q}$.

1) Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de P ? Quelle est la multiplicité de -1 comme racine de P ?

2) Factoriser P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

3) Quel est le pgcd unitaire de P et Q ?

4) Mettre la fraction rationnelle F sous forme réduite.

5) Donner les pôles et les zéros de F, avec leurs ordres de multiplicité.

6) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

Exercice 13. (*Contrôle continu 2014*)

On pose $P = X^3 - X^2 - 2X$, $Q = X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ et $F = \dfrac{P}{Q}$.

1) Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de Q ? Quelle est la multiplicité de -1 comme racine de Q ? Quelle est la racine de Q qui manque ? En déduire la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le pgcd unitaire de P et Q.

3) Vérifier que $\dfrac{X(X-2)}{(X-1)^2(X+2)}$ est la forme réduite de F.

4) Donner les pôles et les zéros de F, avec leurs ordres de multiplicité.

5) Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. (*Examen 2016*)

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles : $F = \dfrac{2X^2-1}{X^3+1}$ et $G = \dfrac{X+2}{X^4(X^3+1)}$.

1) a) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de F.

b) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

2) Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Réponse :

1) a) $F = \dfrac{2X^2-1}{X^3+1} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2-X+1}$

b) $F = \dfrac{2X^2-1}{X^3+1} = \dfrac{1}{3(X+1)} + \dfrac{5X-4}{3(X^2-X+1)}$

2) La division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de $X+2$ par X^3+1 donne

$$2 + X = (2 + X - 2X^3)(1 + X^3) + X^4(-1 + 2X^2)$$

par suite $\dfrac{X+2}{X^4(X^3+1)} = \dfrac{2}{X^4} + \dfrac{1}{X^3} - \dfrac{2}{X} + \dfrac{2X^2-1}{X^3+1}$ et par conséquent

$$G = \frac{2}{X^4} + \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X} + \frac{1}{3(X+1)} + \frac{5X-4}{3(X^2-X+1)}$$

Exercice 15. (*Deuxième session 2016*)

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $F = \dfrac{X^2+1}{(X-3)^3(X^2-6X+10)}$.

1) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de F.

2) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

3) Quelle est la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$?

Exercice 16.

Calculer les primitives suivantes en précisant dans chaque cas le domaine où elles sont définies :
Du tout venant

$$1)\ \int \frac{x^3-2x}{x+1}dx \quad 2) \int \frac{dx}{x^2-4x+2} \quad 3)\ \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$4) \int \frac{dx}{4x^2+4x+5} \quad 5) \int \frac{x^5+2}{x^5-x}dx \quad 6)\ \int \frac{x^2-x}{x^4+3x^2+2}dx$$

$$7) \int \frac{dx}{x^3+1} \quad 8) \int \frac{xdx}{x^3+x^2+x+1} \quad 9) \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Cas des fonctions impaires

$$10) \int \frac{x^3dx}{x^4+3x^2+2} \quad 11) \int \frac{2dx}{x(x^2+1)^2} \quad 12) \int \frac{dx}{x^3(x^2+4)(x^2+9)}$$

Cas des fonctions paires

$$13) \int \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+4}dx \quad 14) \int \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}dx \quad 15) \int \frac{dx}{1-x^4}$$

$$16) \int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^2} \quad 17) \int \frac{dx}{x^4+1} \quad 18) \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$$

De plus en plus compliquées

$$19) \int \frac{x+1}{(x^2-1)^3}dx \quad 20) \int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x-1)^2} \quad 21) \int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes en précisant dans chaque cas le domaine où elles sont définies :

$$1) \int \frac{dx}{4+\cos x} \quad 2) \int \frac{dx}{2-3\sin x} \quad 3) \int \frac{\cos^2 x dx}{4\cos^2 x+9\sin^2 x}$$

$$4) \int \frac{\cos x}{\cos 3x}dx \quad 5) \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx \quad 6) \int \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos x\cos 2x} \quad 8) \int \frac{\sin x}{1+\cos x+\cos 2x}dx \quad 9) \int \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$$

$$10) \int \frac{\cos^3 x+2\cos x+1}{2+\cos x}dx \quad 11) \int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} \quad 12) \int \tan^2 x dx$$