UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 2

Feuille d'exercices n°3

Exercice n°1

Soient a, b deux réels et m, n deux entiers naturels. Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de A par B quand :

1) A arbitraire, $B = (X - a)(X - b)$. On exprimera le reste en fonction de $A(a)$ et $A(b)$ si $a \neq b$ et en fonction de $A(a)$ et $A'(a)$ si $a = b$.

2) $A = (\cos a + X \sin a)^n$ et $B = X^2 + 1$;

3) $A = (X - 1)^m + X^m - 1$ et $B = X^2 - X + 1$ (on discutera suivant les valeurs de m).

Exercice n°2

Trouver un polynôme A unitaire de degré inférieur à 3, multiple de $X - 1$, dont les restes des divisions de A par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ soient tous égaux.

Exercice n°3

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que les restes des divisions de A par $X^2 + 1$ et $X^2 - 1$ valent respectivement $2X - 2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de A par $X^4 - 1$?

Exercice n°4 *Contrôle continu 2014*

Je suis un polynôme à coefficients réels de degré 3 et

- je suis divisible par $X^2 + 2$
- mon reste dans la division euclidienne par $X - 2$ est 12
- mon reste dans la division euclidienne par $X + 2$ est -4

Qui suis-je ?

Exercice n°5 *(Examen 2016)*

Trouver un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré vérifiant les trois propriétés suivantes :

- P est unitaire
- $P(0) = 3$
- le reste dans la division euclidienne de P par $(X^2 + X + 1)$ est $X + 1$

Exercice n°6

Soient m, n et p trois entiers naturels. Montrer que le polynôme $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$. En déduire une factorisation de $X^8 + X^4 + X^3$.

Exercice n°7

Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation : $P^2(X) - XQ^2(X) = XR^2(X)$. Montrer que P, Q et R sont identiquement nuls. La propriété reste-t-elle vraie si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Exercice n°8 *(Examen 2016)*

On se propose de déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2 + 1) = [P(X)]^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0$$

où $P(X^2 + 1)$ désigne le polynôme obtenu en substituant $X^2 + 1$ à la variable X dans le polynôme P.

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers naturels définie par : $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite est strictement croissante.

2) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2+1) = [P(X)]^2 + 1$ et $P(0) = 0$. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $P(a_n) = a_n$.

3) En déduire que X est le seul polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2+1) = [P(X)]^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

Exercice n°9 *(Difficile)*

Déterminer tous les polynômes A de $\mathbb{R}[X]$ satisfaisant à la relation : $A(X^2) = A(X)A(X+1)$. *(On pourra remarquer que si α est une racine de A alors $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, ...,$ sont aussi des racines de A.)*

Exercice n°10

Déterminer deux entiers a et b tels que le polynôme $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$. Généraliser au cas de $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice n°11

1) On considère le polynôme $A = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Déterminer la multiplicité de 2 en tant que racine de A.

2) On considère le polynôme $A = X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 11X^2 + 7X + 3$. Montrer que j est un zéro d'ordre 2. En déduire toutes les racines de A. Quel est le *pgcd* unitaire de A et A' ?

3) Soit le polynôme $A = X^4 + (-4+2i)X^3 + (12-8i)X^2 + (4+26i)X - 13$. Montrer que $-i$ est une racine de A dont on précisera l'ordre de multiplicité. Déterminer toutes les racines complexes de A.

Exercice n°12

1) Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^3$ divise $P(X)-1$.

2) Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur à quatre tel que X^3 divise $P(X)+1$ et $(X-1)^2$ divise $P(X)$. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Trouver un polynôme P de degré 5 tel que $P(X)+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X)-10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice n°13 *Contrôle continu 2015*

1) Trouver un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $(X-1)^2$ divise $P(X)+1$
- -1 est racine double de $P(X)-2$

2) Trouver un polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ de plus petit degré vérifiant les trois propriétés suivantes :

- P est à coefficients réels
- $P(i) = 0$
- le reste dans la division euclidienne de P par $(X-2)$ est 3

Exercice n°14

1) Soit un polynôme A de $\mathbb{R}[X]$ non constant, dont tous les coefficients sont entiers. On suppose que le rationnel $\frac{p}{q}$ (où p et q sont deux entiers premiers entre eux) est une racine de A. Montrer que p divise le coefficient constant de A et q divise le coefficient dominant de A.

2) Factoriser le polynôme : $2X^3 - X^2 - 13X + 5$. Le polynôme $X^3 + 3X - 1$ admet il une racine rationnelle ?

3) Montrer que le réel : $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme à coefficient entier de degré trois, en déduire que ce nombre a est un irrationnel.

$\boxed{\textbf{Exercice n°15}}$

Trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-2) = 7$, $P(1) = 2$ et $P(3) = 1$ et le mettre sous la forme $aX^2 + bX + c$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°16}}$

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Montrer que tout polynôme de degré deux ou trois est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si il n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$. Est-ce encore vrai pour des polynômes de degrés supérieurs ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°17}}$

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.
Vérifier que i est racine de P et en déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°18}}$ *(Deuxième session 2016)*

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2m} + (X + 1)^n - 1$ par $X(X + 1)$.

Dans la suite, A désigne un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ et on pose $B(X) = [A(X)]^{2m} + (A(X) + 1)^n - 1$.

2) Montrer que $[A(X)]^2 + A(X)$ divise $B(X)$.

3) Montrer que si x_0 est une racine de multiplicité 1 de A alors x_0 est une racine de multiplicité 1 de B.

4) On suppose que $A = X^2 + 1$, $m = 1$ et $n = 3$. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°19}}$

On considère le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$.

1) Calculer $D = \mathrm{pgcd}(P, P')$ et trouver deux polynômes U et V tels que $D = PU + P'V$.

2) En déduire les racines doubles de P dans $\mathbb{C}$ et ses décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°20}}$

Décomposer en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$\begin{array}{lll} X^3 - 1\,; & X^3 + 1\,; & X^3 + 2X^2 + 2X + 1\,; \\ X^4 + 1\,; & X^4 + X^2 + 1\,; & X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\,; \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°21}}$

Soient deux entiers naturels non nuls m et n. On considère les polynômes suivants : $P(X) = X^{2m} + (X+1)^n - 1$ et $Q(X) = X(X + 1)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par Q. Plus généralement soit $A(X)$ un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Considérons le polynôme $B(X) = P(A(X))$.

1) Montrer que le polynôme $Q(A(X))$ divise $B(X)$;

2) Montrer que si α est une racine de multiplicité un de $A(X)$ alors elle est aussi racine de multiplicité un de $B(X)$;

3) On suppose $A(X) = X^2 + 1$, $m = 1$, $n = 3$. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

4) Même question avec : $A(X) = X^2 + X - 1$ et $m = 1$, $n = 2$.

Exercice n°22

On considère le polynôme $P = 2X^3 + X^2 + X - 1$.
Trouver les racines rationnelles de P (voir l'exercice 12). En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°23

1) On considère le polynôme $P = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$. Calculer le *pgcd* unitaire de P et P' et en déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2) Mêmes questions avec le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$.

Exercice n°24 *(Examen 2016)*
On considère le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Déterminer le pgcd unitaire de P et P' (P' désignant le polynôme dérivé de P).

2) En déduire que 2 est racine au moins double de P. Justifier que la multiplicité de 2 comme racine de P est exactement 2.

3) Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°25 *(Deuxième session 2016)*
On considère le polynôme $P = X^4 - 7X^2 + 4X + 20$ de $\mathbb{R}[X]$. On rappelle que $17^2 = 289$.

1) Effectuer la division euclidienne de P par P' (P' désignant le polynôme dérivé de P) et trouver les racines du reste R de cette division.

2) En déduire que -2 est racine au moins double de P. Justifier que la multiplicité de -2 comme racine de P est exactement 2.

3) Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°26

On considère le polynôme $P(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ de $\mathbb{C}[X]$.

1) Déterminer a, b, et c pour que 1 soit racine double et j racine simple de $P(X)$.

2) Vérifier que P est un polynôme à coefficients réels.

3) Calculer les décompositions en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°27

On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.

1) Décomposez P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et de Q en 1 et en 2).

2) Déterminez le ppcm et le pgcd (unitaires) des polynômes P et Q.

Relations coefficients-racines

Exercice n°28

Soient a, b, c les racines de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice n°29

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7X + a$ où a est une inconnue. Déterminer a pour que P ait deux racines de somme 1.

Exercice n°30 *Examen 2010*
Trouver le nombre réel p tel que le polynôme $X^3+pX^2-4X+24$ ait trois racines réelles a,b,c vérifiant $c-b=b-a$.

Exercice n°31 *Deuxième session 2011*
Soient a,b,c,d les quatre racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4+15X^2-6X+2011$.
Que vaut $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$?

Exercice n°32

Trouver un polynôme de degré trois dont les racines sont les carrés des racines du polynôme X^3+X^2-2X-1.

Exercice n°33

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de chacun des trois systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+xz=-13 \\ xyz=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases}$$

Exercice n°34 *Contrôle continu 2015*
On note a, b et c les racines complexes du polynôme X^3+X^2+X-1.

1) Calculer $a^2+b^2+c^2$.

2) Trouver un polynôme unitaire P de degré 3 dont les racines sont $2a$, $2b$ et $2c$.

Exercice n°35 *(Deuxième session 2016)*
On considère le polynôme $P=X^3+2X^2+2X+3$ de $\mathbb{C}[X]$ dont on note a, b et c les racines complexes.

1) Calculer les quantités $s_1=a^2+b^2+c^2$, $s_2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ et $s_3=a^2b^2c^2$.

2) Trouver un polynôme (en donner les coefficients) de degré trois dont les racines sont a^2, b^2 et c^2.

Exercice n°36 *Examen 2015*
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6} \\[2ex] \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=\dfrac{-1}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{xyz}=\dfrac{-1}{6} \end{cases}$$