Feuille d'exercices n°3
Réponses (succintes)

Exercice 1. Soient α, b deux réels et m, n deux entiers naturels. Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de A par B quand :

1)A arbitraire, $B = (X-a)(X-b)$. On exprimera le reste en fonction de $A(a)$ et $A(b)$ si $a \neq b$ et en fonction de $A(a)$ et $A'(a)$ si $a = b$.

2)$A = (\cos\alpha \ + X\sin\alpha)^n$ et $B = X^2 + 1$;

3)$A = (X-1)^m + X^m - 1$ et $B = X^2 - X + 1$ (on discutera suivant les valeurs de m).

Réponse : 1) Le reste de la division euclidienne de A par B est $R = \begin{cases} \frac{A(b)-A(a)}{b-a}X + \frac{bA(a)-aA(b)}{b-a} \text{ si } a \neq b \\ A'(a)X + A(a) - aA'(a) \text{ si } a = b \end{cases}$

2) Le reste de la division euclidienne de A par B est $R = \sin(n\alpha)X + \cos(n\alpha)$.

3) $A = (X-1)^m + X^m - 1$ et $B = X^2 - X + 1$ (on discutera suivant les valeurs de m). On écrit, $(X-1)^m + X^m - 1 = Q(X)(X^2 - X + 1) + aX + b$, et on utilise que les racines de $X^2 - X + 1$ sont $-j$ et $-j^2$. Il suffit ici en réalité d'utiliser l'évaluation en $-j$, sachant que tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x + jy$, avec $x,y \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$(-1)^m(1+j)^m + (-1)^m j^m - 1 = Q(-j) \times 0 - aj + b.$$

On distingue ensuite suivant la valeur de m modulo 3, utilisant que $j + 1 = -j^2$ on aura

$$(-1)^m(1+j)^m + (-1)^m j^m - 1 = j^{2m} + (-1)^m j^m - 1.$$

— Si $n \equiv 0$ [3], alors $j^{2m} = j^m = 1$, et donc on a $(-1)^m = -aj + b$ de sorte que le reste est $(-1)^m$.

— Si $n \equiv 1$ [3], alors $j^m = j$ et donc $j^{2m} = j^2 = -1 - j$, ce qui donne

$$-1 - j + (-1)^m j - 1 = \big((-1)^m - 1\big)j - 2 = -aj + b.$$

Le reste est donc $-\big((-1)^m - 1\big)X - 2$.

— Si $n \equiv 2$ [3], alors $j^{2m} = j$ et $j^m = j^2 = -1 - j$. On trouve

$$j + (-1)^m(-1-j) - 1 = \big((-1)^{m+1} + 1\big)j - \big((-1)^m + 1\big) = -aj + b.$$

Le reste est alors $-\big((-1)^{m+1} + 1\big)X - \big((-1)^m + 1\big)$.

Exercice 2. Trouver un polynôme A unitaire de degré inférieur à 3, multiple de $X - 1$, dont les restes des divisions de A par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ soient tous égaux.
Réponse : $A = (X-2)(X-3)(X-4) + 6$

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{K}[X]$ tel que les restes des divisions de A par $X^2 + 1$ et $X^2 - 1$ valent respectivement $2X - 2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de A par $X^4 - 1$?
Réponse : Le reste R est un polynôme de degré au plus 3 tel que $R(i) = 2i - 2$, $R(-i) = -2i - 2$, $R(1) = -4$, $R(-1) = 4$ alors $R = -3X^3 + X^2 - X - 1$.

Exercice 4. (*Contrôle continu 2014*) Je suis un polynôme à coefficients réels de degré 3 et
-je suis divisible par $X^2 + 2$
-mon reste dans la division euclidienne par $X - 2$ est 12
-mon reste dans la division euclidienne par $X + 2$ est -4

Qui suis-je ?
Réponse : Comme le polynôme recherché P est de degré 3 et divisible par X^2+2, il s'écrit $P=(X^2+2)Q$ où Q est un polynôme de degré 1, donc $Q=aX+b$, i.e. $P=(X^2+2)(aX+b)$. On doit donc déterminer a et b. On sait que $P(2)=12$ et $P(-2)=-4$, on obtient le système $\begin{cases} 12a+6b=12 \\ -12a+6b=-4 \end{cases}$ qui a pour solution $a=\frac{2}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$.
D'où $P=(X^2+2)(\frac{2}{3}X+\frac{2}{3})=\frac{2}{3}X^3+\frac{2}{3}X^2+\frac{4}{3}X+\frac{4}{3}$.

Exercice 5. Trouver un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré vérifiant les trois propriétés suivantes :
•P est unitaire
•$P(0)=3$
• le reste dans la division euclidienne de P par (X^2+X+1) est $X+1$
Réponse : $P=2X^2+3X+3$.

Exercice 6. Soient m, n et p trois entiers naturels. Montrer que le polynôme X^2+X+1 divise $X^{3m}+X^{3n+1}+X^{3p+2}$. En déduire une factorisation de $X^8+X^4+X^3$.
Réponse : On utilise que les racines de X^2+X+1 sont j et j^2.Il suffit ici en réalité d'utiliser l'évaluation en j. On a $j^{3m}+j^{3n+1}+j^{3p+2}=1+j+j^2=0$ et en déduit que X^2+X+1 divise $X^{3m}+X^{3n+1}+X^{3p+2}$. On a $X^8+X^4+X^3=X^3(X^5+X+1)$. En particulier, X^5+X+1 est divisible par X^2+X+1 et on trouve $X^5+X+1=(X^2+X+1)(X^3-X^2+1)$. Finalement, $X^8+X^4+X^3=X^3(X^2+X+1)(X^3-X^2+1)$.

Exercice 7. Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation : $P^2(X)-XQ^2(X)=XR^2(X)$. Montrer que P, Q et R sont identiquement nuls. La propriété reste-t-elle vraie si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?
Réponse : On a $P^2(X)=X(R^2(X)+Q^2(X))$, si $P=0$, alors $Q=R=0$ sinon $deg(P^2)$ est pair alors que $X(R^2(X)+Q^2(X))$ est impair, ainsi, l'unique solution dans $\mathbb{R}[X]$ est $P=Q=R=0$. Il n'est pas de même dans $\mathbb{C}[X]$, par exemple $P=0$, $Q=1$ et $R=i$ est une solution.

Exercice 8. On se propose de déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2+1)=[P(X)]^2+1 \; et \; P(0)=0$$

où $P(X^2+1)$ désigne le polynôme obtenu en substituant X^2+1 à la variable X dans le polynôme P.
1) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers naturels définie par : Montrer que cette suite est strictement croissante. $\alpha_0=0$ et $\alpha_{n+1}=\alpha_n^2+1$ pour $n\in\mathbb{N}$.
2) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2+1)=[P(X)]^2+1$ et $P(0)=0$. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $P(\alpha_n)=\alpha_n$.
3) En déduire que X est le seul polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2+1)=[P(X)]^2+1$ et $P(0)=0$.

Exercice 9. Déterminer tous les polynômes A de $\mathbb{R}[X]$ satisfaisant à la relation : $A(X^2)=A(X)A(X+1)$. (*On pourra remarquer que si α est une racine de A alors α, α^2, α^4, ..., sont aussi des racines de A.*)
Réponse : $A=0$ ou $A=X^m(X-1)^m$, $m\in\mathbb{N}$.

Exercice 10. Déterminer deux entiers a et b tels que le polynôme $(X-1)^2$ divise aX^4+bX^3+1. Généraliser au cas de $aX^{n+1}+bX^n+1$.

Réponse : $(X-1)^2$ divise aX^4+bX^3+1 si et seulement si $\begin{cases} a+b+1=0 \\ 4a+3b=0 \end{cases}$
c-à-d $a=3$ et $b=-4$.

De même $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1}+bX^n+1$ si et seulement si $a=n$ et $b=-(n+1)$.

Exercice 11. 1) On considère le polynôme $A=X^5-5X^4+7X^3-2X^2+4X-8$. Déterminer la multiplicité de 2 en tant que racine de A.

2) On considère le polynôme $A=X^5+5X^4+9X^3+11X^2+7X+3$. Montrer que j est un zéro d'ordre 2. En déduire toutes les racines de A. Quel est le *pgcd* unitaire de A et A' ? 3) Soit le polynôme $A=X^4+(-4+2i)X^3+(12-8i)X^2+(4+26i)X-13$. Montrer que $-i$ est une racine de A dont on précisera l'ordre de multiplicité. Déterminer toutes les racines complexes de A.

Réponse : 1) On a $A(2)=A'(2)=A''(2)=0$ et $A'''(2)\neq 0$, ainsi la multiplicité de 2 en tant que racine de A est 3.

2) On a $A(j)=A'(j)=0$ et $A''(j)\neq 0$, ainsi la multiplicité de j en tant que racine de A est 2. Par conséquent $(X^2+X+1)^2$ divise A et on trouve $A=(X^2+X+1)^2(X+3)$, d'où les racines de A sont j et j^2 d'ordre 2 et -3 qui est simple. Ainsi, le *pgcd* unitaire de A et A' est X^2+X+1.

3) On a $A(-i)=A'(-i)=0$ et $A''(-i)\neq 0$, ainsi la multiplicité de $-i$ en tant que racine de A est 2.. On déduit que $(X+i)^2$ divise A, on trouve $A=(X+i)^2(X-(2-3i))(X-(2+3i))$.

Exercice 12.

1) Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^3$ divise $P(X)-1$.

2) Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur à quatre tel que X^3 divise $P(X)+1$ et $(X-1)^2$ divise $P(X)$. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Trouver un polynôme P de degré 5 tel que $P(X)+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X)-10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Réponse : 1) $P=X^4-2X^2-X+1$.

2) $P=-3X^4+4X^3-1$

3) $P=\dfrac{15}{128}X^5-\dfrac{25}{16}X^3+\dfrac{17}{8}X$

Exercice 13. 1) Trouver un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré vérifiant les deux propriétés suivantes :

•$(X-1)^2$ divise $P(X)+1$

• -1 est racine double de $P(X)-2$

2) Trouver un polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ de plus petit degré vérifiant les trois propriétés suivantes :

•P est à coefficients réels

•$P(i)=0$

• le reste dans la division euclidienne de P par $(X-2)$ est 3

Réponse : 1) $P=\dfrac{9}{12}X^3-\dfrac{9}{4}X+\dfrac{1}{2}$

2) $P=\dfrac{3}{5}(X^2+1)$

Exercice 14. 1) Soit un polynôme A de $\mathbb{R}[X]$ non constant, dont tous les coefficients sont entiers. On suppose que le rationnel $\dfrac{p}{q}$ (où p et q sont deux entiers premiers entre eux) est une racine de A. Montrer que p divise le coefficient constant de A et q divise le coefficient dominant de A.

2) Factoriser le polynôme : $2X^3-X^2-13X+5$. Le polynôme X^3+3X-1 admet il une racine rationnelle ?

3) Montrer que le réel : $\alpha=\cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme à coefficient entier de degré trois, en déduire que ce nombre α est un irrationnel.

Réponse :1)

2) On a $2X^3 - X^2 - 13X + 5 = (2X+5)(X^2-3X+1)$.

Le polynôme $P = X^3 + 3X - 1$ n'admet pas de racine rationnelle ; car une telle racine, d'après 1), est nécessairement égale à 1 ou -1, mais, on on a $P(1) = 3$ et $P(-1) = -5$.

3) On a $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ et $\cos(3\frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

On déduit que $\alpha = \cos(\frac{\pi}{9})$ est une racine du polynôme à coefficients entiers $P = 8X^2 - 6X - 1$.

On vérfie que P n'a pas de racine rationnelle, par conséquent $\alpha = \cos(\frac{\pi}{9})$ est un irrationnel.

Exercice 15. Trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-2) = 7$, $P(1) = 2$ et $P(3) = 1$ et le mettre sous la forme $\alpha X^2 + bX + c$.

Réponse :$P = 7\dfrac{(X-1)(X-3)}{15} + 2\dfrac{(X+2)(X-3)}{-6} + \dfrac{(X+2)(X-1)}{10} = \dfrac{7}{15}X^2 - \dfrac{43}{30}X + \dfrac{16}{5}$

Exercice 16. Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Montrer que tout polynôme de degré deux ou trois est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si il n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$. Est-ce encore vrai pour des polynômes de degrés supérieurs ?

Réponse : Le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, puisque $P = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$.

Exercice 17. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Vérifier que i est racine de P et en déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse :$P = (X^2+1)(X^2-2X+2)$.

Exercice 18. (*Deuxième session 2016*)

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2m} + (X+1)^n - 1$ par $X(X+1)$.

Dans la suite, A désigne un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ et on pose $B(X) = [A(X)]^{2m} + (A(X)+1)^n - 1$.

2) Montrer que $[A(X)]^2 + A(X)$ divise $B(X)$.

3) Montrer que si x_0 est une racine de multiplicité 1 de A alors x_0 est une racine de multiplicité 1 de B.

4) On suppose que $A = X^2 + 1$, $m = 1$ et $n = 3$. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Réponse :

Exercice 19. On considère le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$.

1) Calculer $D = pgcd(P, P')$ et trouver deux polynômes U et V tels que $D = PU + P'V$.

2) En déduire les racines doubles de P dans $\mathbb{C}$ et ses décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Réponse :1) $D = pgcd(P, P') = X^2 - X + 1$

2) Les racines doubles de P dans $\mathbb{C}$ sont les racines de $X^2 - X + 1$ c-à-d $-j$et $-j^2$ par conséquent $P = (X+j)^2(X+j^2)^2 = ((X+j)(X+j^2))^2 = (X^2-X+1)^2$.

$P = (X+j)^2(X+j^2)^2$ est la décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $P = (X^2-X+1)^2$ est la décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. Décomposer en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$X^3 - 1$; $X^3 + 1$; $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$;

$X^4 + 1$; $X^4 + X^2 + 1$; $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$;

Réponse : $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$; $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$; $X^3+2X^2+2X+1 =$

$(X+1)(X^2+X+1)$;

$X^4+1=(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$; $\quad X^4+X^2+1=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$;
$X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$;

Exercice 21. On considère le polynôme $P=2X^3+X^2+X-1$.

Trouver les racines rationnelles de P (voir l'exercice 12). En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
Réponse : $P=(2X-1)(X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $P=(2X-1)(X-j)(X-j^2)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 22. Soient deux entiers naturels non nuls m et n. On considère les polynômes suivants : $P(X)=X^{2m}+(X+1)^n-1$ et $Q(X)=X(X+1)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par Q. Plus généralement soit $A(X)$ un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Considérons le polynôme $B(X)=P(A(X))$.

1) Montrer que le polynôme $Q(A(X))$ divise $B(X)$;

2) Montrer que si α est une racine de multiplicité un de $A(X)$ alors elle est aussi racine de multiplicité un de $B(X)$;

3) On suppose $A(X)=X^2+1$, $m=1$, $n=3$. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

4) Même question avec : $A(X)=X^2+X-1$ et $m=1$, $n=2$.

Exercice 23. On considère le polynôme $P=2X^3+X^2+X-1$.

Trouver les racines rationnelles de P (voir l'exercice 12). En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
Réponse : $P=2X^3+X^2+X-1=(2X-1)(X^2+X+1)$ la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et $P=(2X-1)(X-j)(X-j^2)$ la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 24. 1) On considère le polynôme $P=X^6-6X^5+15X^4-20X^3+12X^2-4$. Calculer le *pgcd* unitaire de P et P' et en déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2) Mêmes questions avec le polynôme $P=X^4-2X^3+3X^2-2X+1$.
Réponse :1) Le *pgcd* unitaire de P et P' est égal à X^2-2X+2. Alors $(X^2-2X+2)^2$ divise P et on a $P=(X^2-2X+2)^2(X^2-2X-1)$ Ainsi, $P=(X^2-2X+2)^2(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})$ est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $P=(X-(1+i))^2(X-(1-i))^2(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})$. celle dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Pour $P=X^4-2X^3+3X^2-2X+1$ voir l'exercice 19.

Exercice 25. On considère le polynôme $P=X^4-4X^3+5X^2-4X+4$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Déterminer le pgcd unitaire de P et P' (P' désignant le polynôme dérivé de P).

2) En déduire que 2 est racine au moins double de P. Justifier que la multiplicité de 2 comme racine de P est exactement 2.

3) Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
Réponse :

Exercice 26. (*Deuxième session 2016*) On considère le polynôme $P=X^4-7X^2+4X+20$ de $\mathbb{R}[X]$. On rappelle que $17^2=289$.

1) ectuer la division euclidienne de P par P' (P' désignant le polynôme dérivé de P) et trouver les racines du reste R de cette division.

2)En que -2 est racine au moins double de P. Justifier que la multiplicité de -2 comme racine de P est exactement 2.

3) Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 27. On considère le polynôme $P(X) = X^6 + \alpha X^4 + bX^3 + c$ de $\mathbb{C}[X]$.
1) Déterminer α, b, et c pour que 1 soit racine double et j racine simple de $P(X)$.
2) Vérifier que P est un polynôme à coefficients réels.
3) Calculer les décompositions en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 28. On considère les polynômes $P = 3X^4 - 9X^3 + 7X^2 - 3X + 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$.
1) Décomposez P et Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$, puis sur $\mathbb{C}[X]$ (on pourra calculer les valeurs de P et de Q enleten2).
2) Déterminez le ppcm et le pgcd (unitaires) des polynômes P et Q.
Relations coefficients-racines

Exercice 29. Soient a, b, c les racines de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.
Réponse : On a l'identité

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca).$$

Comme a, b, c sont les racines de X^3+2X-1, les relations coefficients-racines donnent $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = 2 \\ abc = 1 \end{cases}$,
et on obtient $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0 - 2 \times 2 = -4$.
D'autre part $X^3 + 2x - 1 = 0$ entraîne $X^4 + 2X^2 - X = 0$, c-à-d $X^4 = -2X^2 + X$, par suite $a^4 + b^4 + c^4 = -2(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) = -2(-4) + 0 = 8$.

Exercice 30. On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7X + a$ où a est une inconnue. Déterminer a pour que P ait deux racines de somme 1.
Réponse : Si x_1, x_2, x_3 sont les racines de $P = 2X^3-X^2-7X+a$, les relations coefficients-racines donnent $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{-7}{2} \\ x_1x_2x_3 = \frac{-a}{2} \end{cases}$.
Maintenant si $x_1 + x_2 = 1$, on aura $x_3 = \frac{1}{2} - (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$, par suite $x_1x_2 = a$ et $\frac{-7}{2} = x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = a - \frac{1}{2}$, ce qui donne $a = -3$.

Exercice 31. [*Examen 2010*] Trouver le nombre réel p tel que le polynôme $X^3 + pX^2 - 4X + 24$ ait trois racines réelles a, b, c vérifiant $c - b = b - a$.
Réponse : $p = -6$.

Exercice 32. (*Deuxième session 2011*) Soient a, b, c, d les quatre racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 15X^2 - 6X + 2011$. Que vaut $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$?
Réponse : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = \dfrac{6}{2011}$.

Exercice 33. Trouver un polynôme de degré trois dont les racines sont les carrés des racines du polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1$.
Réponse : Si a, b, c sont les racines de X^3+X^2-2X-1, les relations coefficients-racines donnent

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ ab+bc+ca=-2 \\ abc=1 \end{cases}.$$

On a $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2(-2)=5$,
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=4-2(1)(-1)=6$ et enfin $a^2b^2c^2=(abc)^2=1$.

Par conséquent X^3-5X^2+6X-1 a pour racines a^2, b^2 et c^2.

Exercice 34. Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de chacun des trois systèmes suivants :

1)

$$\begin{cases} x+y+z\ =0 \\ xy+yz\ +xz\ =-13 \\ xyz=-12 \end{cases}.$$

Doù x, y et z sont les racines de $X^3-13X+12=(X-1)(X-3)(X+4)$, par suite
$(x,y,z)\in\{(3,1,-4),(3,-4,1),(1,3,-4),(1,-4,3),(-4,3,1),(-4,1,3)\}$

2)

$$\begin{cases} x+y+z\ =-2 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z\ =-2 \\ yz+xz+xy=2 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

Doù x, y et z sont les racines de $X^3+2X^2+2X+1=(X+1)(X-j)(X-j^2)$, ainsi
$(x,y,z)\in\{(-1,j,j^2),(-1,j^2,j),(j,-1,j^2),(j,j^2,-1),(j^2,-1,j),(j^2,j,-1)\}$

3)

$$\begin{cases} x+y+z\ =1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z\ =1 \\ yz+xz+xy=xyz=-4 \\ xyz=-4 \end{cases}$$

Doù x, y et z sont les racines de $X^3-X^2-4X+4=(X-1)(X-2)(X+2)$, par suite
$(x,y,z)\in\{(-2,1,2),(-2,2,1),(1,-2,2),(1,2,-2),(2,-2,1),(2,1,-2)\}$

Exercice 35. (*Contrôle continu 2015*) On note a, b et c les racines complexes du polynôme X^3+X^2+X-1.

1) Calculer $a^2+b^2+c^2$.

2) Trouver un polynôme unitaire P de degré 3 dont les racines sont $2a$, $2b$ et $2c$.

Réponse : Si a, b, c sont les racines de X^3+X^2+X-1, les relations coefficients-racines donnent

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ ab+bc+ca=1 \\ abc=1 \end{cases}.$$

1) Calculer $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(-1)^2-2(1)=-1$.

2) On a $\begin{cases} 2a+2b+2c=-2 \\ (2a)(2b)+(2b)(2c)+(2c)(2a)=4(1)=4 \\ (2a)(2b)(2c)=8(1)=8 \end{cases}$

ainsi $2a$, $2b$ et $2c$ sont les racines de X^3+2X^2+4X-8.

Exercice 36. (*Deuxième session 2016*) On considère le polynôme $P=X^3+2X^2+2X+3$ de $\mathbb{C}[X]$ dont on note a, b et c les racines complexes.

1) Calculer les quantités $s_1=a^2+b^2+c^2$, $s_2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ et $s_3=a^2b^2c^2$.

2) Trouver un polynôme (en donner les coefficients) de degré trois dont les racines sont a^2, b^2 et c^2.

Réponse : 1) $s_1=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(-2)^2-2(2)=0$

$s_2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=(2)^2-2(-3)(-2)=4-12=-8$

et $s_3=a^2b^2c^2=(abc)^2=(-3)^2=9$.

2) PAr conséquent a^2, b^2 et c^2 sont les racines de $X^3 - 8X - 9$.

Exercice 37. (*Examen 2015*) Réoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{xyz} = \frac{-1}{6} \end{cases}$$

Réponse :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{xyz} = \frac{-1}{6} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} yz + xz + xy = \frac{5}{6}xyz = -5 \\ x + y + z = \frac{-1}{3}xyz = 2 \\ xyz = -6 \end{cases}$$

Ainsi x, y et z sont les racines de $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X-1)(X+2)(X-3)$ d'où $(x,y,z) \in \{(-2,1,3), (-2,3,1), (1,-2,3), (1,3,-2), (3,-2,1), (3,1,-2)\}$