Algèbre et Arithmétique 2

Feuille d'exercices n°2

Exercice n°1

Soit un corps $\mathbb{K}$. Considérons l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soient A, B, C, U, V des éléments de cet anneau. Montrer que si A divise B et C alors il divise $UB + VC$.

Exercice n°2

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif).

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k - B^k = (A-B)\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-1-i}$.

2) En déduire que $A(X) - X$ divise $B(A(X)) - B(X)$ puis que $A(X) - X$ divise $A(A(X)) - X$.

Exercice n°3

À quelles conditions sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice n°4

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants :

1) $A = 2X^6 + 6X^5 + X^3 - 8X$ et $B = X + 3$;

2) $A = 4X^4 + X^2 + 1$ et $B = X - 1$;

3) $A = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 5$ et $B = X^2 + X + 1$.

Exercice n°5

Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer la division euclidienne de $X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$.

Exercice n°6

Dans chacun des cas suivants, utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer un *pgcd* D de A et B puis trouver deux polynômes U et V tels que : $AU + BV = D$.

1) $A = 3X^3 + 2X^2 + 2$ et $B = X^2 - 2$.

2) $A = (X-1)^2$ et $B = (X+1)^2$.

3) $A = 3X^3 - 2X^2 - 7X - 2$ et $B = 2X^2 + 3X + 1$.

4) $A = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$ et $B = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$.

Exercice n°7

Dans chacun des cas suivants, calculer le pgcd unitaire D de A et B puis trouver deux polynômes U et V tels que : $AU + BV = D$.

1) $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

2) $A = X^3 - X^2 - X - 2$ et $B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$.

3) $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

Exercice n°8 *Contrôle continu 2016*

On considère les polynômes $A = X^4 + X^3 + X$ et $B = X^3 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Calculer le pgcd (unitaire) D de A et B.

2) Trouver deux polynômes U_0 et V_0 tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

3) Soient U et V deux polynômes tels que $AU + BV = 1$. Montrer que A divise $V - V_0$.

4) Trouver tous les polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

Exercice n°9

Soient $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un *pgcd* de A et B.

Exercice n°10

Soient deux polynômes A et B non tous deux nuls. On note D le *pgcd* unitaire de A et B, et U, V deux polynômes satisfaisant : $AU + BV = D$. Donner un *pgcd* de U et V.

Exercice n°11

Soient A et B deux polynômes premiers entre eux. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels, alors les polynômes A^m et B^n sont aussi premiers entre eux.

Exercice n°12

Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$.

1) A-t-on $\text{pgcd}(A, B) = 1 \iff \text{pgcd}(A + B, AB) = 1$?

2) A-t-on $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(A + B, AB)$?

Exercice n°13 $(\star)$

Soient $a \in \mathbb{K}^*$ et $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On suppose $n > k$ et on note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par k.

1) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^k - a^k$ est égal à $a^{kq}(X^r - a^r)$.

2) Notons $d = pgcd(n, k)$. Montrer que $\text{pgcd}(X^n - a^n, X^k - a^k) = X^d - a^d$.

Exercice n°14 *Contrôle continu 2013*

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)^2(X+2)(X^2+1)^2 \\ Q(X) &= (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1)(X^2+X+1) \\ R(X) &= (X+3)^3(X+1)(X^2+1)^3 \end{aligned}$$

1) Donner le pgcd et le ppcm de P et Q

2) Donner le pgcd et le ppcm des trois polynômes P, Q et R. (On généralise facilement les définitions et résultats donnés pour deux polynômes au cas de plusieurs polynômes.)

Exercice n°15

Soient A, B et C les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$A = (X+3)^2(X+1)(X^2+1)^3 \qquad B = (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1) \qquad C = (X+3)(X+2)(X^2+1)^2.$$

1) Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?

2) Donner le pgcd et le ppcm de A et B.

3) Donner le pgcd et le ppcm des trois polynômes A, B et C.

Exercice n°16

Soient $A = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$ et $B = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\mathrm{pgcd}(A, B)$ et factoriser A et B en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°17 *Contrôle continu 2014*

1) Calculer le pgcd unitaire D des polynômes $A = X^4 + X^2 - 2X$ et $B = X^3 - X^2 - 4$.

2) Trouver deux polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

3) Déterminer le ppcm unitaire de A et B.

4) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°18 *Contrôle continu 2015*

1) Calculer le pgcd unitaire D des polynômes $A = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + X + 6$ et $B = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X + 5$.

2) Trouver deux polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

3) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Déterminer le ppcm unitaire de A et B.

Exercice n°19

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\deg(A)$ le degré d'un polynôme A de $\mathbb{R}[X]$. Soient $A = X^3 + 2X^2 - X - 2$ et $B = X^3 - 3X - 2$.

1) Calculer D le pgcd unitaire de A et B.

2) Trouver deux polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation $AU_0 + BV_0 = D$ avec $\deg(U_0) < \deg(B)$ et $\deg(V_0) < \deg(A)$.

3) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{C}[X]$.

4) Trouver le ppcm unitaire de A et B.

Exercice n°20

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $A = 3X^3 - 2X^2 - 7X - 2$ et $B = 2X^2 + 3X + 1$.

Exercice n°21

Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ suivant les puissances :

1) décroissantes (division euclidienne) ; **2)** croissantes, à l'ordre 4.

$\boxed{\textbf{Exercice n°22}}$

1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$ à l'ordre 3.

2) En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^4(x^2 + 1)}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°23}}$

Soient $A = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $B = X^5$.

1) Vérifier que A et B sont premiers entre eux.

2) Trouver $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que $A.U + B.V = 1$ (utiliser une division suivant les puissances croissantes).