Algèbre et Arithmétique 2
Feuille d'exercices n°2
Réponses (succintes)

Exercice $n°$1

Soit un corps K. Considérons l'ensemble K$[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soient $A,\ B,\ C,\ U,\ V$ des éléments de cet anneau. Montrer que si A divise B et C alors il divise $UB+VC$.
Réponse : Par hypothèse, il existe des polynômes P et Q tels que $B = PA$ et $C = QA$, alors $UB + VC = (UP + VQ)A$, i.e. A divise $UB + VC$.

Exercice $n°$2

Soient A et B deux éléments de K$[X]$ (où K désigne un corps commutatif).

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k - B^k = (A-B)\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-1-i}$.

2) En déduire que $A(X) - X$ divise $B(A(X)) - B(X)$ puis que $A(X) - X$ divise $A(A(X)) - X$.
Réponse :

Exercice $n°$3

À quelles conditions sur $(\alpha,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $X^4 + \alpha X^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?
Réponse : La division euclidienne de $X^4 + \alpha X^2 + bX + c$ par $X^2 + X + 1$ donne

$$X^4 + \alpha X^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a) + (b - 1 - a)X + (c - a)$$

alors, $X^4 + \alpha X^2 + bX + c$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si le reste $(b - 1 - a)X + (c - a) = 0$ i.e $b = a + 1$ et $c = a$.

Exercice $n°$4

Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les cas suivants :
1) $A = 2X^6 + 6X^5 + X^3 - 8X$ et $B = X + 3$;
2) $A = 4X^4 + X^2 + 1$ et $B = X - 1$;
3) $A = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 5$ et $B = X^2 + X + 1$.
Réponse :
1) $A = 2X^6 + 6X^5 + X^3 - 8X = (X + 3)(2x^5 + x^2 - 3x + 9) - 27$
2) $A = 4X^4 + X^2 + 1 = (X - 1)(4X^3 + 4X^2 + 5X + 5) + 6$
3) $A = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 5 = (X^2 + X + 1)(X^3 - 3X^2 + 5X - 6) + (6X + 1)$

Exercice $n°$5

Dans $\mathbb{C}[X]$, ectuer la division euclidienne de $X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$.
Réponse : $X^2 - 3iX - 5(1+i) = (X-1+i)(X+1-4i) + (-8-10i)$.

Exercice $n°$6

Dans chacun des cas suivants, utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer un *pgcd* D de A et B puis trouver deux polynômes U et V tels que : $AU + BV = D$.

1) $A = 3X^3 + 2X^2 + 2$ et $B = X^2 - 2$.
2) $A = (X-1)^2$ et $B = (X+1)^2$.
3) $A = 3X^3 - 2X^2 - 7X - 2$ et $B = 2X^2 + 3X + 1$.
4) $A = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$ et $B = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$.

Réponse :

1) Le pgcd unitaire de A et B est égal à 1, $U = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}X$ et $V = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X - \frac{2}{3}$.
2) Le pgcd unitaire de A et B est égal à 1, $U = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}X$ et $V = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}X$.
3) Le pgcd unitaire de A et B est égal à $X+1$, $U = \frac{4}{5}$ et $V = \frac{13}{5} - \frac{6}{5}X$.
4) Le pgcd unitaire de A et B est égal à $X^2 - iX + 1$, $U = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9}X$ et $V = \frac{4}{9} + \frac{1}{9}X - \frac{2}{9}X^2$.

Exercice $n°$7

Dans chacun des cas suivants, calculer le pgcd unitaire D de A et B puis trouver deux polynômes U et V tels que : $AU + BV = D$.

1) $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.
2) $A = X^3 - X^2 - X - 2$ et $B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$.
3) $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

Réponse :

1) Le pgcd unitaire de A et B est égal à 1, $U = \frac{1}{2}$ et $V = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$
2) Le pgcd unitaire de A et B est égal à $X-1$, $U = \frac{2}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{4}{3}$ et $V = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}X$
3) Le pgcd unitaire de A et B est égal à 1, $U = \frac{3}{7} + \frac{1}{7}X$ et $V = -\frac{1}{7}X^3 - \frac{3}{7}X^2 + \frac{1}{7}X + \frac{4}{7}$

Exercice $n°$8

On considère les polynômes $A = X^4 + X^3 + X$ et $B = X^3 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Calculer le pgcd (unitaire) D de A et B.
2) Trouver deux polynômes U_0 et V_0 tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.
3) Soient U et V deux polynômes tels que $AU + BV = 1$. Montrer que A divise $V - V_0$.
4) Trouver tous les polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

Réponse : 1) Les divisions euclidiennes successives donnent :

$$\begin{cases} A = B(X+1) + (-X^2 - X - 1) \\ B = (-X^2 - X - 1)(-X+1) + (X+2) \\ (-X^2 - X - 1) = (X+2)(X+1) + (-3) \end{cases}$$

Ceci montre que le p.g.c.d. unitaire des polynômes A et B est égal à 1.

2) En remontant l'algorithme d'Euclide, on a

$-3 = (-X^2 - X - 1) - (X+2)(X+1)$
$= (-X^2 - X - 1) - (B - (A - B(X+1))(-X+1))(X+1)$
$= A(X^2 - 2X + 2) - B(X^3 - X^2 - X + 3)$

Alors les polynômes $U_0 = -\dfrac{1}{3}(X^2 - 2X + 2)$ et $V_0 = \dfrac{1}{3}(X^3 - X^2 - X + 3)$ vérifient donc l'égalité $U_0A + V_0B = 1$.

3) Soient $U,\ V \in \mathbb{R}[X]$ tel que $AU + BV = 1$. Alors $A(U_0 - U) = B(V - V_0)$. Ainsi A divise $B(V - V_0)$ et comme A et B sont premiers entre eux, le lemme de Gauss assure que A divise $V - V_0$.Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V = V_0 + AP$, ce qui donne $A(U_0 - U) = ABP$ et donc $U = U_0 - BP$ puisque A est non nul. Réciproquement si il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U = U_0 - Bp$ et $V = V_0 + Ap$, alors $AU + BV = AU_0 - ABp + BV_0 + ABp = AU_0 + BV_0 = 1$.

Ainsi l'ensemble des couples $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ qui vérifient $AU + BV = 1$ est égale à

$$\{(U, V) = (U_0 - BP, V_0 + AP) |\ P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Exercice $n°$9

Soient $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un *pgcd* de A et B.

Réponse : Le pgcd unitaire de A et B est égal à 1, et les polynômes $U_0 = X^3 - X^2 - 5X + 7$ et $V_0 = -X^3 + X^2 + 4X - 5$ vérifient l'égalité $U_0A + V_0B = 1$.

Alors tout pgcd de A et B est une constante non nulle c et $cU_0A + cV_0B = c$.

Finalement, en suivnt le même raisonnement utilisé dans l'exercice précédent, on trouve que l'ensemble des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un *pgcd* de A et B est

$$\{(U, V) = (cU_0 - BP, cV_0 + AP) | \ \text{où } P \in \mathbb{R}[X] \ \text{ et } c \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice $n°$10

Soient deux polynômes A et B non tous deux nuls. On note D le *pgcd* unitaire de A et B, et $U,\ V$ deux polynômes satisfaisant : $AU + BV = D$. Donner un *pgcd* de U et V.

Réponse : Comme D est le *pgcd* unitaire de A et B, il existe des polynômes P et Q tels que $A = DP$ et $B = DQ$, alors $D = AU + BV = D(PU + QV)$, par suite $D(PU + QV - 1) = 0$, comme $D \neq 0$, ceci entraîne que $PU + QV = 1$, d'où le *pgcd* unitaire de U et V est égal à 1 i.e. U et V sont premiers entre eux.

Exercice $n°$11

Soient A et B deux polynômes premiers entre eux. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels, alors les polynômes A^m et B^n sont aussi premiers entre eux.

Réponse :

Exercice $n°$12

Soient A et B dans $\mathrm{K}[X]$.

1) A-t-on pgcd $(A,\ B) = 1 \Leftrightarrow$ pgcd $(A+B,\ AB) = 1$?

2) A-t-on pgcd $(A,\ B) =$ pgcd $(A+B,\ AB)$?

Réponse :

Exercice $n°$13

Soient $\alpha \in \mathrm{K}^*$ et $(n,\ k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On suppose $n > k$ et on note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par k.

1) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - \alpha^n$ par $X^k - \alpha^k$ est égal à $\alpha^{kq}(X^r - \alpha^r)$.

2) Notons $d = pgcd(n,\ k)$. Montrer que pgcd $(X^n - \alpha^n,\ X^k - \alpha^k) = X^d - \alpha^d$.

Réponse :

Exercice $n°$14

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$P(X) = (X+1)^2(X+2)(X^2+1)^2$$

$$Q(X) = (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1)(X^2+X+1)$$

$$R(X) = (X+3)^3(X+1)(X^2+1)^3$$

1) Donner le pgcd et le ppcm de P et Q

2) Donner le pgcd et le ppcm des trois polynômes $P,\ Q$ et R. (On généralise facilement les définitions et résultats donnés pour deux polynômes au cas de plusieurs polynômes.)

Réponse :

1) L'énonce nous donne la décomposition en facteurs irréductibles de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$; on en déduit que $pgcd(P,Q) = (X+2)(X^2+1)$ et $ppcm(P,Q) = (X+1)^2(X+2)^2(X+3)^2(X^2+1)^2(X^2+X+1)$.

2) On voit d'après la décomposition en facteurs irréductibles, que le polynôme unitaire de plus haut degré qui divise à la fois de P, Q et R est $pgcd(P,Q,R) = (X^2+1)$ et le polynôme unitaire de plus bas degré qui est multiple à la fois de P, Q et R est $ppcm(P,Q,R) = (X+1)^2(X+2)^2(X+3)^3(X^2+1)^3(X^2+X+1)$.

Exercice $n°$15

Soient $A,\ B$ et C les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$A = (X+3)^2(X+1)(X^2+1)^3 \quad B = (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1) \quad C = (X+3)(X+2)(X^2+1)^2$

1) Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?

2) Donner le pgcd et le ppcm de A et B.

3) Donner le pgcd et le ppcm des trois polynômes $A,\ B$ et C.

Réponse :

1) L'énonce nous donne la décomposition en facteurs irréductibles de A et B et C dans $\mathbb{R}[X]$. D'où A a $(2+1)(1+1)(3+1) = 3.2.4 = 24$ diviseurs normalisés, B a $(2+1)(2+1)(1+1) = 3.3.2 = 18$ diviseurs normalisés et C a $(1+1)(1+1)(2+1) = 2.2.3 = 12$ diviseurs normalisés.
2) Le $pgcd(A,B) = (X+3)^2(X^2+1)$ et $ppcm(A,B) = (X+3)^2(X+1)(X+2)^2(X^2+1)^3$.
3) On voit d'après la décomposition en facteurs irréductibles, que le polynôme unitaire de plus haut degré qui divise à la fois de A, B et C est $pgcd(A,B,C) = (X+3)(X^2+1)$ et le polynôme unitaire de plus bas degré qui est multiple à la fois de A, B et C est $ppcm(A,B,C) = (X+3)^2(X+1)(X+2)^2(X^2+1)^3$.

Exercice $n°$16

Soient $A = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$ et $B = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$. Calculer pgcd $(A,\ B)$ et factoriser A et B en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
Réponse : Le pgcd unitaire de A et B est égal à $X^2 - X + 1$. La décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, de $A = (X^2 - X + 1)(2X^2)$ et celle de $B = (X^2 - X + 1)(x^2 + 2)$.

Exercice $n°$17

1) Calculer le pgcd unitaire D des polynômes $A = X^4 + X^2 - 2X$ et $B = X^3 - X^2 - 4$.
2) Trouver deux polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.
3) Déterminer le ppcm unitaire de A et B.
4) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Réponse :

1) On a par les divisions euclidiennes successives : $\begin{cases} A = (X+1)B + (2X^2 + 2X + 4) \\ B = (X^2 + X + 2)(X - 2) \end{cases}$.
   Ainsi le pgcd unitaire de A et B est $X^2 + X + 2$.
2) En remontant l'algorithme d'Euclide, on obtient : $X^2 + X + 2 = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(X+1)B$, d'où les polynômes $U = \frac{1}{2}$ et $V = -\frac{1}{2}(X+1)$ conviennent.
3) Puisque A et B sont unitaires, on a $ppcm(A,B).pgcd(A,B) = AB$. D'autre part $B = (X^2 + X + 2)(X - 2) = pgcd(A,B)(X+2)$, d'où
   $ppcm(A,B) = A(X+2) = (X^4 + X^2 - 2X)(X+2)$.
4) (a) Le polynôme $X^2 + X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, car son discriminant est égal à -7. D'où $B\ = (X^2 + X + 2)(X - 2)$ est la décomposition en produits de facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{R}[X]$.
   On a $A = (X^2 + X + 2)(X^2 - X) = (X^2 + X + 2)(X - 1)X$ c'est donc la décomposition de A dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Le polynôme $X^2 + X + 2$ a pour racines $-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. D'où
   $B\ = (X + \frac{1+i\sqrt{7}}{2})(X + \frac{1-i\sqrt{7}}{2})(X - 2)$ et $A = (X + \frac{1+i\sqrt{7}}{2})(X + \frac{1-i\sqrt{7}}{2})(X - 1)X$ sont respectivement les décompositions en produits de facteurs irréductibles de B et A dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice $n°$**18**

1) Calculer le pgcd unitaire D des polynômes $A = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + X + 6$ et $B = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X + 5$.

2) Trouver deux polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

3) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Déterminer le ppcm unitaire de A et B.

Réponse :

1) Le pgcd unitaire de A et B est $X^2 + X + 1$.
2) $U = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}X$ et $V = 2 - \frac{1}{2}X$.
3) Le polynôme $X^2 + X + 1$ et $X^2 - 4X + 5$ sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, d'où $B = (X^2+X+1)(X^2-4X+5)$ et $A = (X-2)(X-3)(X^2+X+1)$ sont est la décomposition en produits de facteurs irréductibles de B et A dans $\mathbb{R}[X]$.
4) On déduit que le ppcm unitaire de A et B est

$$ppcm(A, B) = (X - 2)(X - 3)(X^2 + X + 1)(X^2 - 4X + 5).$$

Exercice $n°$**19**

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\deg(A)$ le degré d'un polynôme A de $\mathbb{R}[X]$. Soient $A = X^3 + 2X^2 - X - 2$ et $B = X^3 - 3X - 2$.

1) Calculer D le pgcd unitaire de A et B.

2) Trouver deux polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation $AU_0 + BV_0 = D$ avec $\deg(U_0) < \deg(B)$ et $\deg(V_0) < \deg(A)$.

3) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{C}[X]$.

4) Trouver le ppcm unitaire de A et B.

Réponse :

1) Le pgcd unitaire de A et B est $X + 1$.
2) Le polynôme $U_0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}X$ et $V_0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}X$ vérifient l'équation $AU_0 + BV_0 = X + 1$ et $\deg(U_0) = 1 < \deg(B) = 3$ et $\deg(V_0) = 1 < \deg(A) = 3$.
3) $A = (X - 1)(X + 2)(X + 1)$ et $B = (X - 2)(X + 1)^2$ sont les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{C}[X]$ (et aussi dans $\mathbb{R}[X]$).
4) Le ppcm unitaire de A et B est alors égal à $(X + 1)^2(X - 1)(X + 2)(X - 2)$.

Exercice $n°$**20**

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec $A = 3X^3 - 2X^2 - 7X - 2$ et $B = 2X^2 + 3X + 1$.

Réponse :

1) Le pgcd unitaire de A et B est $X + 1$.
2) Le polynôme $U_0 = \frac{4}{5}$ et $V_0 = -\frac{13}{5} - \frac{6}{5}X$ vérifient l'équation $AU_0 + BV_0 = X + 1$ et $\deg(U_0) = 0 < \deg(B) = 2$ et $\deg(V_0) = 1 < \deg(A) = 3$.

3) $A = 3(X + \frac{1}{3})(X - 2)(X + 1)$ et $B = 2(X + \frac{1}{2})(X + 1)$ sont les décompositions en facteurs irréductibles de A et B dans $\mathbb{C}[X]$ (et aussi dans $\mathbb{R}[X]$).

4) Le ppcm unitaire de A et B est alors égal à $(X + \frac{1}{3})(X + \frac{1}{2})(X + 1)$.

Exercice n°21

Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ suivant les puissances : 1) décroissantes (division euclidienne) ; 2) croissantes, à l'ordre 4.
Réponse :

1) La division euclidienne de A par B donne

$$X^6 - 2X^4 + X^3 + 1 = B(X^3 - X^2 - X + 1) + X.$$

2) La division selon les puissance croissante de A par B à l'ordre 4 donne

$$X^6 - 2X^4 + X^3 + 1 = B(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2).$$

Exercice n°22

1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$ à l'ordre 3.
2) En déduire une primitive sur $]\ 0, +\infty[$ de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.
Réponse :

Exercice n°23

Soient $A = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $B = X^5$.
1) Vérifier que A et B sont premiers entre eux.
2) Trouver $(U,\ V) \in (\mathrm{K}[X])^2$ tels que $A.\ U + B.V = 1$ (utiliser une division suivant les puissances croissantes).
Réponse :