UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 2

Feuille d'exercices n°1

Exercice n°1 *Contrôle continu 2014*

1) Trouver les complexes a, b et c tels que $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = 1$

2) Trouver les complexes a, b et c tels que $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = X^3$

3) Trouver les complexes a, b et c tels que $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = 1 + 2X + X^2$.

Exercice n°2 *Contrôle continu 2013*

Trouver a, b, $c \in \mathbb{C}$ tels que :

1) $a(X + 2)(X + 3) + b(X + 1)(X + 3) + c(X + 1)(X + 2) = X$.

2) $a(X + 5)(X + 3) + b(X + 1)(X + 3) + c(X + 1)(X + 5) = X^4$.

Exercice n°3

Soient $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple) et a un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que le polynôme $P = X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4$ est un carré. En déduire une décomposition de $X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 8$ en produit dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°4 *Contrôle continu 2016*

Soient a, b des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 - 12X + 4$. Pour quelles valeurs de a et b existe-t-il un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$?

Exercice n°5

1) Soient a, b des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que le polynôme $X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n°6 $(\star)$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_0 = X - 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n^2 - 2$.
Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Exercice n°7

Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme : $(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)...(1 + X^{2^n})$.

Exercice n°8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $(X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$ de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n le polynôme défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}[(1 + iX)^n - (1 - iX)^n].$$

Montrer que P_n est à coefficients réels. Quel est le degré de P_n ?

Exercice n°10

1) Résoudre l'équation $Q^2 = XP^2$ d'inconnues les polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$.

2) Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $3P(X) = XP(X)$.

Exercice n°11

Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans un certain corps $\mathbb{K}$. Soit a un élément de $\mathbb{K}$.

1) Montrer que l'application $P \longmapsto P(X+a)$ est une bijection de $\mathbb{K}[X]$ dans lui même. Quelle est la bijection réciproque ?

2) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q_a \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_a(X-a) = P(X)$. ($Q_a(X-a)$ est le *développement de P en a*.) Déterminer Q_a lorsque $P(X) = X^3 + 2X + 1$ et $a = 1$.

Exercice n°12

Un polynôme P est dit ***pair*** si $P(-X) = P(X)$.
Un polynôme P est dit ***impair*** si $P(-X) = -P(X)$.

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. Montrer que P est pair (respectivement impair) si et seulement si pour tout k de $\mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$ (respectivement $a_{2k} = 0$).

2) Montrer que tout polynôme A de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = P + I$ où P est un polynôme pair et I un polynôme impair.

Exercice n°13

Soit n un entier strictement positif.

1) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X)P(-X) = Q(X^2)$.
Dans toute la suite, on note Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le polynôme Q tel que $P(X)P(-X) = Q(X^2)$.

2) Calculer $\Phi(1)$, $\Phi(X)$, $\Phi(X+1)$, $\Phi(X-1)$, $\Phi(X^2-1)$, $\Phi(X^2+2X+1)$.

3) Démontrer que $\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \Phi(P_1P_2) = \Phi(P_1)\Phi(P_2)$

4) Trouver deux polynômes P_1 et P_2 tels que $\Phi(P_1 + P_2) \neq \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$.

Exercice n°14

On considère les couples de polynômes (P, Q) suivants dans $\mathbb{R}[X]$.

- P = X, Q = X - 1
- $P = X \quad Q = X^2 - 1$
- $P = X^2 \quad Q = X^2 - 1$
- $P = X^2 - 1 \quad Q = X^2 + X + 1$
- $P = X^2 - 2X + 1 \quad Q = X^2 + X + 1$
- $P = X^2 - 1 \quad Q = X^3 - 1$
- $P = X^3 - X^2 + 2X - 2 \quad Q = X^3 - 1$

Pour chacun de ces couples :

1) Écrire les polynômes P' et Q', calculer le polynôme PQ et vérifier la formule $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

2) Calculer les polynômes $P \circ Q$ et $Q \circ P$ et vérifier les formules $(P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$ et $(Q \circ P)' = P'(Q' \circ P)$.

Exercice n°15 *Contrôle continu 2016*

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée d'ordre n du polynôme $X^n(1-X)^n$ de $\mathbb{R}[X]$:

a) en utilisant la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit.

b) en développant au préalable $(1-X)^n$ par la formule du binôme.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. *(On pourra identifier les coefficients de X^n dans les deux expressions obtenues.)*

Exercice n°16

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$, de degré au plus 2, tels que $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Déterminer le degré du polynôme $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

3) Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

a) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ **b)** $P'^2 = 4P$ **c)** $P \circ P = P$.

Exercice n°17

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = P'P''$

2) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$

3) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $18P = P'P''$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme unique P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$

Exercice n°18 *Contrôle continu 2016*

Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $X^2P'' - (X+1)P' + P = 0$.

Exercice n°19

Pour tout entier naturel n, on note P_n la dérivée à l'ordre n du polynôme $(X^2-1)^n$.

1) Calculer P_1, P_2 et P_3.

2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n et calculer son coefficient dominant.

3) Donner, en fonction de n, la parité de P_n.

Exercice n°20

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P) = (2X-1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P'$.
Déterminer le degré de $\Phi(P)$ en fonction du degré de P. Résoudre l'équation $\Phi(P) = 1$.

Exercice n°21 (*À réserver à une deuxième lecture*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à coefficients dans $\mathbb{K}$) de degré au plus n.
Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel et que $(1, X, \cdots, X^n)$ en est une base (***base canonique***).
$\mathbb{K}_n[X]$ est-il stable par multiplication ?

Exercice n°22 (*À réserver à une deuxième lecture*)

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On suppose cette famille étagée en valuations : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{val}(P_k) < \mathrm{val}(P_{k+1})$. Montrer que cette famille est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\{X^k(1-X)^{n-k},\ k \in [\![0,n]\!]\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.