Algèbre et Arithmétique 2
Feuille d'exercices n°1
Réponses (succintes)

Exercice $n°$**1**

1) Trouver les complexes $a,\ b$ et c tels que $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=1$
2) Trouver les complexes $a,\ b$ et c tels que $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=X^3$
3) Trouver les complexes $a,\ b$ et c tels que $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=1+2X+X^2$.

Réponse :

1) On a $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=(b+c)X^2+(a+b)X+(a+c)$ et en identifiant les deux membres de l'égalité on obtient le système $\begin{cases} b+c=0 \\ a+b=0 \\ a+c=1 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2} \text{ et } c=\frac{1}{2}.}$
Autre méthode : En évaluant l'égalité en $X=-1$, on obtient $2c=1$ donc $c=\frac{1}{2}$. En évaluant l'égalité en $X=0$, on obtient $a+\frac{1}{2}=1$ d'où $a=\frac{1}{2}$. Finalement, en évaluant l'égalité en $X=1$, on obtient $2(\frac{1}{2}+b)+2.\frac{1}{2}=1$ i.e. $2b+2=1$ d'où $b=-\frac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2} \text{ et } c=\frac{1}{2}.}$

2) Il n'existe pas de nombres a, b et c vérifiant l'égalité car $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)$ est de degré au plus 2 alors que X^3 est de degré 3.

3) On a $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=(b+c)X^2+(a+b)X+(a+c)$ et en identifiant les deux membres de l'égalité on obtient le système $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b=2 \\ a+c=1 \end{cases}$ on trouve alors $\boxed{a=1,\ b=1 \text{ et } c=0.}$

Exercice $n°$**2**

Trouver $a,\ b,\ c\in\mathbb{C}$ tels que :
1) $a(X+2)(X+3)+b(X+1)(X+3)+c(X+1)(X+2)=X$.
2) $a(X+5)(X+3)+b(X+1)(X+3)+c(X+1)(X+5)=X^4$.

Réponse :

1) En évaluant l'égalité en $X=-1$, on obtient $2a=-1$ donc $a=-\frac{1}{2}$. En évaluant l'égalité en $X=-2$, on obtient $-2b=-2$ d'où $b=1$. Finalement, en évaluant l'égalité en $X=-3$, on obtient $2c=-3$ d'où $c=-\frac{3}{2}$. Ainsi $\boxed{a=-\frac{1}{2},\ b=1 \text{ et } c=-\frac{3}{2}.}$

2) Il n'existe pas de nombres a, b et c vérifiant l'égalité car $a(X+5)(X+3)+b(X+1)(X+3)+c(X+1)(X+5)$ est de degré au plus 2 alors que X^4 est de degré 4.

Exercice $n°$**3**

Soient $\mathbb{K}[X]$ l'aanneau des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple) et a un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que le polynôme $P = X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4$ est un carré. En déduire une décomposition de $X(X+1)(X+2)(X+3)-8$ en produit (de polynômes de degrés 2) dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse :

i) Si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q^2 = P$ alors $2 \deg Q \ = \deg P = 4$; le polynôme Q est nécessairement de degré 2. Comme P est unitaire, le coefficient dominant de Q est égal à 1 ou -1. Comme $Q^2 = (-Q)^2$ quitte à remplacer Q par $-Q$, on peut supposer que Q est unitaire. Comme par ailleurs le coefficient constant de P est égal à a^4, celui de Q ne peut être que a^2 ou $-a^2$. Ainsi Q est nécessairement un polynôme de la forme X^2+bX+a^2 ou X^2+bX-a^2 avec b dans $\mathbb{K}$.

   Par exemple dansle premier cas, on aura

$$P = Q^2 = (X^2+bX+a^2)^2 = X^4+2bX^3+(b^2+2a^2)X^2+2ba^2X+a^4$$

   et comme $P = X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4 = X^4+6aX^3+11a^2X^2+6a^3X+a^4$ ce qui impose $b = 3a$. Ainsi $P = (X^2+3aX+a^2)^2$ est donc un carré.

ii) On $X(X+1)(X+2)(X+3)-8 = X(X+1)(X+2)(X+3)+1-9$, d'après $i)$ (pour $a = 1$) on a $X(X+1)(X+2)(X+3)+1 = (X^2+3X+1)^2$, d'où

$$X(X+1)(X+2)(X+3)-8 = (X^2+3X+1)^2-9 = (X^2+3X+1)^2-3^2 = (X^2+3X+4)(X^2+3X-2).$$

Exercice $n°$**4**

Soient $a,\ b$ des réels, et $P = X^4+2aX^3+bX^2-12X+4$. Pour quelles valeurs de a et b existe-t-il un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$?

Réponse : Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $P = X^4+2aX^3+bX^2-12X+4$. Si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^2 = P$ alors

$$2\ \deg Q \ = \deg P = 4$$

et le polynôme Q est nécessairement de degré 2. Comme P est unitaire, le coefficient dominant de Q est égal à 1 ou-l. Comme $Q^2 = (-Q)^2$ quitte à remplacer Q par $-Q$, on peut supposer que Q est unitaire. Comme par ailleurs le coefficient constant de P est égal à 4, celui de Q ne peut être que 2 ou-2. Ainsi Q est nécessairement un polynôme de la forme $X^2+\alpha X+2$ ou $X^2+\alpha X-2$ avec α dans $\mathbb{C}$.

Dans le premier cas

$$P = Q^2 = (X^2+\alpha X+2)^2 = X^4+2\alpha X^3+(\alpha^2+4)X^2+4\alpha X+4$$

ce qui impose $\alpha = -3$ puis $b = \alpha^2 + 4 = 13$ et $a = \alpha = -3$.

Dans le second cas

$$P = Q^2 = (X^2 + \alpha X - 2)^2 = X^4 + 2\alpha X^3 + (\alpha^2 - 4)X^2 - 4\alpha X + 4$$

ce qui impose $\alpha = 3$ puis $b = \alpha^2 - 4 = 5$ et $a = \alpha = 3$.

Finalement il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^2 = P$ si et seulement si $(a,\ b) = (-3, 13)$ ou $(a,\ b) = (3,\ 5)$.

Exercice $n°$**5**

1) Soient $a,\ b$ des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que le polynôme $X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Réponse : Cet exercice peut être traité par la méthode de l'exercice précédent, on obtient :

1) il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^2 = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ si et seulement si $(a,\ b) = (1, 3)$ ou $(a,\ b) = (-1,\ -1)$.
2) il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^2 = X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 4$ si et seulement si $(a,\ b) = (6, 13)$ ou $(a,\ b) = (-6,\ 5)$.

Exercice $n°$**6**

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_0 = X - 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n^2 - 2$. Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Réponse : On note par a_n, b_n et c_n les coefficients de 1, X et X^2 du polynôme P_n. Puisque $P_1 = X - 2$, on a $a_1 = -2, b_1 = 1$ et $c_1 = 0$.
De la relation de réccurence $P_{n+1} = P_n^2 - 2$, on aura $a_{n+1} = a_n^2 - 2, b_{n+1} = 2a_nb_n$ et $c_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n$. On en déduit que $a_2 = 2, b_2 = -4$ et $c_2 = 1$ alors pour $n \geq 3$: $a_n = 2,\ b_n = -4^{n-1}$, et le coefficient de X^2

$$c_n = 4^{n-2} + 4^{n-1} + \ldots + 4^{4n-4} = 4^{n-2}(1 + 4 + \ldots + 4^{n-2}) = 4^{n-2}\left(\frac{4^{n-1} - 1}{3}\right).$$

Exercice $n°$**7**

Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme : $(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\ldots(1 + X^{2^n})$.

Réponse : On pose $P_n = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\ldots(1 + X^{2^n})$. Alors $P_0 = 1 + X$, $P_1 = (1 + X)(1 + X^2) = 1 + X + X^2 + X^3$ et pour $n \geq 2$, $P_n = (1 + X^{2^n})P_{n-1}$.

On obtient, alors par réccurence que $P_n = 1 + X + \ldots + X^{2^n+1} = \sum_{k=0}^{2^n+1} X^k$.

Exercice $n°$**8**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $(X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$ de $\mathbb{C}[X]$.

Réponse : Par la formule du binôme de Newton, nous avons

$$(X^2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{2k} \text{ et } (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} X^{2k}$$

d'où $(X^2+1)^n + (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} X^{2k}$

$= 2X^{2n} + 2\binom{n}{n-2} X^{2(n-2)} + 2\binom{n}{n-2} X^{2(n-4)} + \ldots + 2.$

Ainsi $(X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n = 2\binom{n}{n-2}X^{2(n-2)} + 2\binom{n}{n-2}X^{2(n-4)} + \ldots + 2$, et par suite le degré de $(X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$ est égal à $2(n-2)$.

Exercice $n°$**9**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n le polynôme défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}[(1+iX)^n - (1-iX)^n].$$

Montrer que P_n est à coefficients réels. Quel est le degré de P_n ?

Réponse : Par la formule du binôme de Newton, nous avons

$$(1+iX)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k X^k \text{ et } (1-iX)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k X^k$$

Alors

$$P_n = \frac{1}{2i}[(1+iX)^n - (1-iX)^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{i^k - (-i)^k}{2i} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{i^k(1-(-1)^k)}{2i} X^k$$

Le coefficient de X^k dans P_n est $a_k = \binom{n}{k} \frac{i^k(1-(-1)^k)}{2i}$, alors

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ -i^{k-1}\binom{n}{2p+1} = -(i^2)^p\binom{n}{2p+1} = -(-1)^p\binom{n}{2p+1} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

sont donc bien des nombres réels. On déduit aussi que P_n est de degré n si n est impair et de degré $n-1$ si n est pair.

Remarque : Si l'on pose $Q_n(X) = (1-iX)^n]$, on a $P_n(X) = \frac{1}{2i}[Q_n(X) - \bar{Q_n}(X)] = \mathrm{im}(Q_n(X))$ ainsi P_n est un polynôme à coefficient réels.

Exercice $n°$**10**

1) Résoudre l'équation $Q^2 = XP^2$ d'inconnues les polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$.

2) Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $3P(X) = XP(X)$.

Réponse :

1) L'identité $Q^2 = XP^2$ entraîne l'égalité $2\deg(Q) = \deg(Q^2) = \deg(XP^2) = \deg(X) + \deg(P^2) = 2\deg(P) + 1$, et cela impose que $\deg(Q) = \deg(P) = -\infty$ i.e. $P = Q = 0$.
2) L'identité $3P(X) = XP(X)$ entraîne l'égalité $\deg(P) = \deg(P) + 1$ et cela impose que $\deg(P) = -\infty$ i.e. $P = 0$.

Exercice $n°$11

Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans un certain corps K. Soit a un élément de K.

1) Montrer que l'application $P \mapsto P(X + a)$ est une bijection de $\mathbb{K}[X]$ dans lui même. Quelle est la bijection réciproque ?

2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q_a \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_a(X - a) = P(X)$. ($Q_a(X - a)$ est le *développement de P en a.*) Déterminer Q_a lorsque $P(X) = X^3 + 2X + 1$ et $a = 1$.

Réponse :

1) On note par Φ_a l'application de $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $\Phi_a(P) = P(X + a)$.
   Φ_a est injective : car $\Phi_a(P) = \Phi_a(Q)$ est équivalent à $P(X + a) = Q(X + a)$, d'où si on pose $Y = X + a$, on aura $P(Y) = Q(Y)$ i.e. $P = Q$. Φ_a est surjective : en effet soit Q un polynôme. Alors le polynôme défini par $P(X) = Q(X - a)$ vérifie $\Phi_a(P) = P(X + a) = Q((X - a) + a) = Q(X)$.
   Ainsi, $\Phi_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est injective te surjective donc bijective.
2) D'après, la question précédente, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un unique polynôme Q_a tel que $\Phi_a(P) = Q_a$, alors $Q_a(X) = P(X + a)$ i.e. $P(X) = Q_a(X - a)$.
   Application : Si $P(X) = X^2 + 2X + 1$ et $a = 1$, alors :
   $Q_1(X) = P(X + 1) = (X + 1)^2 + (X + 1) + 1 = X^2 + 3X + 3$.

Exercice $n°$12

Un polynôme P est dit *pair* si $P(-X) = P(X)$.

Un polynôme P est dit *impair* si $P(-X) = -P(X)$.

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. Montrer que P est pair (respectivement impair) si et seulement si pour tout k de $\mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$ (respectivement $a_{2k} = 0$).

2) Montrer que tout polynôme A de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = P + I$ où P est un polynôme pair et I un polynôme impair.

Réponse :

1) On a $P(-X) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k X^k$. D'où $P(-X) = P(x)$ (P est pair) si et seulement si pour tout k de $\mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$; et $P(-X) = -P(x)$ (P est impair) si et seulement si pour tout k de $\mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$;

2) Soit $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme. On pose $P = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ pair}}} a_k X^k$ et $I = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ impair}}} a_k X^k$. Alors P est pair, I est impair et $A = P + I$; cette écriture est unique : en effet, si on suppose que $A = P_1 + I_1$ avec P_1 est pair et I_1 impair alors $P_1 + I_1 = P + I$ d'où $P - P_1 = I_1 - I$, ce qui impose $P - P_1 = 0$ et que e $I_1 - I = 0$ car $P - P_1$ est pair et $I_1 - I$ est impair.

Exercice $n°$13

Soit n un entier strictement positif.

1) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X)P(-X) = Q(X^2)$.

Dans toute la suite, on note Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le polynôme Q tel que $P(X)P(-X) = Q(X^2)$.

2) Calculer $\Phi(1),\ \Phi(X),\ \Phi(X+1),\ \Phi(X-1),\ \Phi(X^2-1),\ \Phi(X^2+2X+1)$.

3) Démontrer que $\forall (P_1,\ P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \Phi(P_1P_2) = \Phi(P_1)\Phi(P_2)$

4) Trouver deux polynômes P_1 et P_2 tels que $\Phi(P_1 + P_2) \neq \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$.

Réponse :

1) On pose $R = P(X)P(-X)$. Alors $R(-X) = R(X)$ i.e. R est un polynôme pair et d'après l'exercice précédent, il s'écrit $R = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} X^2 k$. Ainsi $R(X) = Q(X^2)$ où $Q = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} X^k$.

2) On a $\Phi(1) = 1,\ \Phi(X) = -X^2,\ \Phi(X+1) = 1-X^2,\ \Phi(X-1) = -(X^2-1),\ \Phi(X^2-1) = (X^2-1)^2,\ \Phi(X^2+2X+1) = (X+1)^2(X-1)^2$.

3) $\Phi(P_1P_2) = (P_1P_2)(X).(P_1P_2)(-X) = P_1(X)P_2(X)P_1(-X)P_2(-X) = P_1(X)P_1(-X)P_2(X)P_2(-X) = \Phi(P_1)\Phi(P_2)$.

4) Si $P_1 = X$ et $P_2 = -X$, alors $\Phi(P_1 + P_2) = \Phi(0) = 0$, mais $\Phi(P_1) = -X^2 = \Phi(P_2)$ d'où $\Phi(P_1) + \Phi(P_2) = -2X$. Ainsi $\Phi(P_1 + P_2) \neq \Phi(P_1) + \Phi(P_2)$.

Exercice $n°$14

On considère les couples de polynômes $(P,\ Q)$ suivants dans $\mathbb{R}[X]$.

•$\mathrm{P = X,\ Q = X - 1}$

•$P = XQ = X^2 - 1$

•$P = X^2Q = X^2 - 1$

•$P = X^2 - 1Q = X^2 + X + 1$

•$P = X^2 - 2X + 1Q = X^2 + X + 1$

•$P = X^2 - 1Q = X^3 - 1$

•$P = X^3 - X^2 + 2X - 2Q = X^3 - 1$

Pour chacun de ces couples :

1) Écrire les polynômes P' et Q', calculer le polynôme PQ et vérifier la formule $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

2) Calculer les polynômes $P\text{o}Q$ et $Q\text{o}P$ et vérifier les formules $(P\text{o}Q)' = Q'(P'\text{o}Q)$ et $(Q\text{o}P)' = P'(Q'\text{o}P)$.

Exercice $n°$15

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée d'ordre n du polynôme $X^n(1-X)^n$ de $\mathbb{R}[X]$:
   a) en utilisant la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit.
   b) en développant au préalable $(1-X)^n$ par la formule du binôme.
2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. (On pourra identifier les coefficients de X^n dans les deux expressions obtenues.)

Réponse :

1) Considérons le polynôme $P = X^n(1-X)^n$ de $\mathbb{R}[X]$. Il s'agit du produit des polynômes $A = X^n$ et $B = (1-X)^n$.
   a) La formule de Leibniz assure que le n-ème polynôme dérivé de P est donné par

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)} B^{(n-k)}.$$

Comme

$$A^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$$

$$B^{(n-k)} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(1-X)^k = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j X^j$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} P^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-k+j} \binom{n}{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} X^{n-k+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-k+j} n! \binom{n}{k} \binom{k}{j} X^{n-k+j}. \end{aligned}$$

Le coefficient de X^n dans $P^{(n)}$ est donc égal à

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

b) Par ailleurs, en utilisant la formule du binôme, on voit que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n+k}.$$

En dérivant n fois cette expression, on obtient

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} X^k$$

ce qui montre que le coefficient de X^n dans $P^{(n)}$ est également donné par

$$(-1)^n \frac{2n!}{n!} = (-1)^n n! \binom{2n}{n}.$$

2) En comparant les deux expressions obtenues, on obtient l'égalité souhaitée :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice $n°$16

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$, de degré au plus 2, tels que $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$
2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Déterminer le degré du polynôme $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.
3) Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

a)$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ b)$P'^2 = 4P$ c)$P \circ P = P$.

Réponse :

1) Soit $P(X) = aX^2+bX+c$ un polynôme de degré ≤ 2 tel que $P(X+1)P(X) = -P(X^2)$ i.e. $(a(X+1)^2+b(X+1)+c)(aX^2+bX+c) = a^2X^4+(2ab+2a^2)X^3 = -aX^4-bX^2-c$. Alors, l'identification des coefficients dominants donne $a^2 = -a$ i.e. $a = 0$ ou $a = -1$.
   i) Si $a = 0$, on a $b^2X^2 + (2bc+b^2)X + c(b+c) = -bX^2 - c$, alors $b^2 = -b$ i.e. $b = 0$ ou $b = -1$.
   Si $b = 0$ on a $c^2 = -c$ i.e. $c = 0$ ou $c = -1$.
   Si $b = -1$ on a $(-X+c-1)(-X+c) = X^2 - c$, et n'a pas de solution.
   ii) Si $a = -1$, on a $(-X^2+(-2+b)X+(-1+b+c))(-X^2+bX+c) = X^4 - bX^2 - c$, d'où $b = 1$ alors $(-X^2 - X + c)(-X^2 + X + c) = X^4 - X^2 - c$ ainsi $c = 0$.

   Finalement, $P(X) = aX^2 + bX + c$ est solution si $(a,b,c) = (0,0,0)$ ou $(0,0,-1)$ et $(1,-1,0)$.

2) Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $Q(X) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k((X+1)^k - X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = a_{n-1}\binom{n}{n-1} X^{n-1} + \ldots = na_{n-1}X^{n-1} + \ldots$ est de degré $n-1$.

3) a) Si $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ alors $2\deg(P) = \deg(P(X^2)) = \deg((X^2+1)P(X)) = 2+\deg(P)$ d'où $\deg(P) = 2$ ou $P = 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$, alors $aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$ et par identification $b = 0$ et $c = -a$. Ainsi $P = a(X^2-1)$.

b) Si $P'^2 = 4P$ alors $2(\deg(P)-1) = \deg(P'2) = \deg(4P) = \deg(P)$ d'où $\deg(P) = 2$ ou $P = 0$. Posons $P = aX^2 + bX + c$, alors $(2aX+b)^2 = 4(aX^2 + bX + c)$ ce qui impose $a^2 = a$, $ab = b$ et $b^2 = c$. Ainsi $P = 0$ ou $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Si $P \circ P = P$, alors $(\deg(P))^2 = \deg(P)$ d'où $\deg(P) = 1$, $\deg(P) = 0$ ou $P = 0$. Posons $P = aX + b$, alors $a(aX+b) + b = aX + b$ ce qui impose $a^2 = a$ et $ab = 0$ Ainsi $P = 0$ ou $P = X$ ou $P = b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice $n°$17

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = P'P''$
2) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que$X(X+1)P''+(X+2)P'-P = 0$
3) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $18P = P'P''$
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme unique P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.

Réponse :

1) Si $\deg(P) < 2$ alors $P" = 0$, d'où $P = 0$. Si $\deg(P) \geq 2$ on a $\deg(P) = \deg(P(2X)) = (\deg(P)-1) + \deg(P) - 2)$ d'où $\deg(P) = 3$. Ainsi, $P(2X) = P'P''$ a pour solution $P = 0$ ou $P = \frac{4}{9}X^3$.
2) On trouve $P = a(x+2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3) Si $\deg(P) < 2$ alors $P" = 0$, d'où $P = 0$. Si $\deg(P) \geq 2$ on a $\deg(P) = \deg(P(2X)) = (\deg(P)-1) + \deg(P) - 2)$ d'où $\deg(P) = 3$. Ainsi, $18P = P'P''$ a pour solution $P = 0$ ou $P = X^3 + bX^2 + \frac{b^2}{3}X + \frac{b^3}{27}$, avec $b \in \mathbb{R}$.
4) Les polynômes solutions de $P_n - P_n' = X^n$ sont nécessairement de degré n. Soit $P_n = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$. Alors $P_n - P_n' = X^n$ équivaut à $a_n = 1$, $a_{n-1} = na_n$, $a_{n-2} = (n-1)a_{n-1}, \ldots, a_0 = a_1$ Par suite l'équation a une solution unique qui est : $P = X_n + nX_{n-1} + n(n-1)X_{n-2} + \ldots + n!$

Exercice $n°$18

Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $X^2P'' - (X+1)P' + P = 0$.
Réponse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^2P'' - (X+1)P' + P = 0$. On peut écrire P sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où n est un entier que l'on peut supposer ≥ 2 et $a_0, \ \ldots, \ a_n$ sont des nombres complexes. Comme

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}, \quad P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2},$$

on a $X^2P''-(X+1)P'+P = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^k - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}X^k + \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$

$$= (a_0 - a_1) - 2a_2X + \sum_{k=2}^{n-1}((k-1)^2a_k - (k+1)a_{k+1})X^k + (n-1)^2a_nX^n.$$

Or un polynôme est nul si et seulement tous ses coefficients le sont.
On a donc $a_1 = a_0,\ a_2 = 0,\ a_n = 0$ et pour tout $k \in \{2,\ \ldots,\ n-1\}$, $a_{k+1} = \dfrac{(k-1)^2a_k}{k+1}$.
Ceci montre que $a_k = 0$ pour tout $k \geq 2$ et que $a_0 = a_1$. Ainsi $P = a_0(1+X)$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice $n°$19

Pour tout entier naturel n, on note P_n la dérivée à l'ordre n du polynôme $(X^2-1)^n$.
1) Calculer $P_1,\ P_2$ et P_3.
2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n et calculer son coefficient dominant.
3) Donner, en fonction de n, la parité de P_n.

Réponse :

1) $P_1 = (X^2-1)' = 2X$ $P_2 = ((X^2-1)^2)'' = 12X^2 - 4$ et $P_3 = ((X^2-1)^3)''' = (X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)''' = 120X^3 - 72X$.
2) On écrit $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$ de $\mathbb{R}[X]$. Il s'agit du produit des polynômes $A = (X+1)^n$ et $B = (X-1)^n$. La formule de Leibniz assure que le n-ème polynôme dérivé de P_n est donné par

$$P_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)}B^{(n-k)}.$$

Comme

$$A^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}$$

$$B^{(n-k)} = \frac{n!}{k!}(X-1)^k$$

on en déduit que

$$P_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}(X+1)^{n-k}(X-1)^k = \sum_{k=0}^{n} n!\binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k$$

Comme $\deg((X+1)^{n-k}(X-1)^k) = n$ et que $n!\binom{n}{k}^2 > 0$ on déduit que $P_n^{(n)}$ est de degré n, son coefficient dominant est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n!\binom{n}{k}^2$.

3) P_n est un polynôme pair, alors le n-ème polynôme dérivé de P_n est pair si n est pair et impair sinon.

Exercice $n°$20

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,
$\Phi(P) = (2X-1)P - (X^2 + \dfrac{1}{2})P'$.
Déterminer le degré de $\Phi(P)$ en fonction du degré de P. Résoudre l'équation $\Phi(P) = 1$.
Réponse :

1) Si $P = 0$ alors $\Phi(P) = 0$ et ainsi $\deg(\Phi(P)) = -\infty$.
   Sinon, on pose $P(X) = a_n X_n + Q$ où $n = \deg(P)$ et $\deg(Q) < n$.
   On a alors $\Phi(P) = (2X-1)(a_nX^n+Q)-(X^2+\frac{1}{2})(na_nX^{n-1}+Q') = (2-n)a_nX^{n+1}+R$ où $\deg(R) < n+1$.
   On a donc deux cas : Si $n \neq 2$, on constate que $\deg(\Phi(P)) = \deg(P) + 1$.
   Si $n = 2$, on pose $P = aX^2 + bX + c$ où $a \neq 0$, alors $\Phi(P) = (2X-1)(aX^2 + bX + c) - X^2 + \frac{1}{2}(aX^2 + bX + c)' = (2X-1)(aX^2 + bX + c) - X^2 + \frac{1}{2}(2aX + b) = (b-a)X^2 + (2c-b-a)X - (\frac{b}{2} + c)$
   Si $b \neq a$, ainsi $\deg(\Phi(P)) = 2$.
   SI $b = a$, ainsi $\Phi(P) = 2(c-a)X - 2a + c$, d'où deux possibilités, $a = b$ et $a = c$, alors $\deg(\Phi(P)) = 1$, ou bien $a = b = c$ et $\Phi(P) = -\frac{3a}{2} \neq 0$ donc $\deg(\Phi(P)) = 0$.
2) Pour résoudre $\Phi(P) = 1$, on doit avoir $P = a(X^2 + X + 1)$ et dans ce cas $\Phi(P) = -\frac{3a}{2}$ d'où
$$\Phi(P) = 1 \iff P = -\frac{2}{3}(X^2 + X + 1)$$

Exercice $n°$21

A réserver à une deuxième lecture)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathrm{K}_n[X]1$ 'ensemble des polynômes (à coefficients dans K) de degré au plus n.

Montrer que $\mathrm{K}_n[X]$ est un espace vectoriel et que $(1,\ X,\ \cdots,\ X^n)$ en est une base (*base canonique*). $\mathrm{K}_n[X]$ est-il stable par multiplication ?

Exercice $n°$22

A réserver à une deuxième lecture)

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathrm{K}[X]$. On suppose cette famille étagée en valuations : $\forall k \in \mathbb{N}$, val $(P_k) <$ val (P_{k+1}). Montrer que cette famille est libre dans $\mathrm{K}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\{X^k(1-X)^{n-k},\ k \in [[0, n]]\}$ est une base de $\mathrm{K}_n[X]$.