UNIVERSITÉ DE RENNES 1

# Algèbre et Arithmétique 2

## Corrigé rapide de l'examen du 4 mai 2016

## Questions de cours *(3 points)*

**1)** On suppose le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Pour tout polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (où $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$) de $\mathbb{K}[X]$ et tout scalaire $a$ de $\mathbb{K}$, on a : $\quad A(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

**2)** Supposons que $X - a$ divise $A$, soit $A = (X-a)Q$. On obtient aussitôt $A(a) = (a-a)Q(a) = 0$. Réciproquement, supposons que $A(a) = 0$. On peut faire la division euclidienne de $A$ par $X - a$ : $A = Q(X-a) + R$, où le degré de $R$ est strictement inférieur à $1 = \deg(X-a)$ donc $R$ est une constante $c$. En évaluant cette relation en $a$, on obtient $0 = A(a) = c$. Ainsi, $A = (X-a)Q$ et donc $X - a$ divise $A$.

## Exercice n°1 *(2,5 points)*

Dire que le reste dans la division euclidienne de $P$ par $(X^2+X+1)$ est $X+1$ revient à dire que $P$ peut s'écrire $P = (X^2+X+1)Q + X + 1$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. La condition $P$ unitaire revient alors à $Q$ unitaire et la condition $P(0) = 3$ à $Q(0) = 2$. On cherche donc un polynôme unitaire $Q$ de plus bas degré vérifiant $Q(0) = 2$. C'est évidemment $Q = X + 2$ et finalement $P = (X^2+X+1)(X+2)+X+1 = X^3+3X^2+4X+3$.

## Exercice n°2 *(5,5 points)*

**1)** On utilise l'algorithme de Euclide de recherche du pgcd (divisions euclidiennes successives) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{4}X - \frac{1}{4}$ | $-8X+32$ | $-\frac{1}{100}X - \frac{3}{100}$ |
| $X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$ | $4X^3 - 12X^2 + 10X - 4$ | $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 3$ | $50X - 100$ |
| $X^4 - 3X^2 + \frac{5}{2}X^2 - X$ | $4X^3 + 4X^2 - 24X$ | $-\frac{1}{2}X^2 + X$ | |
| $-X^3 + \frac{5}{2}X^2 - 3X + 4$ | $-16X^2 + 34X - 4$ | $-\frac{3}{2}X + 3$ | |
| $-X^3 + 3X^2 - \frac{5}{2}X + 1$ | $-16X^2 - 16X + 96$ | $-\frac{3}{2}X + 3$ | |
| $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 3$ | $50X - 100$ | $0$ | |

Le dernier reste non nul est $50X - 100 = 50(X-2)$ donc $\mathrm{pgcd}(P, P') = X - 2$.

**2)** On en déduit que 2 est racine de $P$ et de $P'$ (car $X - 2|P$ et $X - 2|P'$) et donc 2 est racine au moins double de $P$. Or $P'' = 12X^2 - 24X + 10$ donc $P''(2) = 10 \neq 0$ : 2 est racine de multiplicité 2 de $P$.

**3)** On factorise donc $P$ par $(X-2)^2$ : $P = (X-2)^2(X^2+1)$. C'est la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Dans $\mathbb{C}[X]$, on écrit $P = (X-2)^2(X-i)(X+i)$.

## Exercice n°3 *(5 points)*

**1)** Une récurrence immédiate montre que tous les termes de cette suite sont positifs. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 = (a_n - 1)^2 + a_n > 0$. La suite $(a_n)$ est donc bien strictement croissante.

**2)** Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ l'assertion « $P(a_n) = a_n$ ».

- *(initialisation)* On a $P(a_0) = P(0) = 0 = a_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} P(a_{n+1}) &= P(a_n^2 + 1) && \text{par définition de la suite } (a_n) \\ &= P(a_n)^2 + 1 && \text{par définition de } P \\ &= a_n^2 + 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= a_{n+1} && \text{par définition de la suite } (a_n) \end{aligned}$$

• *(conclusion)* Par le théorème de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(a_n) = a_n$

**3)** Le polynôme $P - X$ s'annule donc en tous les $a_n$ qui sont, d'après 1), deux à deux distincts. Ce polynôme admettant une infinité de racines, il est nul et finalement $P = X$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(5 points)*

**1) a)** La décomposition en facteurs irréductibles de $X^3+1$ dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$. La décomposition en éléments simples de $F$ dans $\mathbb{R}(X)$ est donc de la forme $F = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2-X+1}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

**b)** • En multipliant $F$ par $X+1$ et en évaluant en $-1$ on obtient $\dfrac{2-1}{1+1+1} = a$ soit $a = \dfrac{1}{3}$.

• En multipliant $F$ par $X^2-X+1$ et en évaluant en $-j$ on obtient $\dfrac{2j^2-1}{-j+1} = -bj+c$ et donc $-bj+c = \dfrac{(2j^2-1)(-j^2+1)}{3} = \dfrac{-4-5j}{3}$ ou encore $b = \dfrac{5}{3}$ et $c = -\dfrac{4}{3}$. Finalement,

$$\frac{2X^2-1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{3}\frac{5X-4}{X^2-X+1}.$$

**2)** On effectue la division suivant les puissances croissantes de $2+X$ par $1+X^3$ à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|l}
2 + X & 1+X^3 \\ \cline{2-2}
2+2X^3 & 2+X-2X^3 \\ \cline{1-1}
X-2X^3 & \\
X+X^4 & \\ \cline{1-1}
-2X^3-X^4 & \\
-2X^3-2X^6 & \\ \cline{1-1}
-X^4+2X^6 &
\end{array}$$

On en déduit $2+X = (1+X^3)(2+X-2X^3) + X^4(-1+2X^2)$ et donc $G = \dfrac{2}{X^4} + \dfrac{1}{X^3} - \dfrac{2}{X} + \dfrac{2X^2-1}{X^3+1}$. Compte tenu de 1) on a donc finalement :

$$G = \frac{2}{X^4} + \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X} + \frac{1}{3}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{3}\frac{5X-4}{X^2-X+1}.$$