UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 2

Examen du 4 mai 2016

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices sont entièrement indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. ***Durée : 2 heures****.*

Questions de cours *(3 points)*

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1) Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

2) Soient A un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et a un élément de $\mathbb{K}$.
Démontrer que a est une racine de A si et seulement si $X-a$ divise A.

Exercice n°1 *(2 points)*

Trouver un polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ de plus petit degré vérifiant les trois propriétés suivantes :

- P est unitaire
- $P(0)=3$
- le reste dans la division euclidienne de P par (X^2+X+1) est $X+1$

Exercice n°2 *(5 points)*

On considère le polynôme $P=X^4-4X^3+5X^2-4X+4$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Déterminer le pgcd unitaire de P et P' (P' désignant le polynôme dérivé de P).

2) En déduire que 2 est racine au moins double de P. Justifier que la multiplicité de 2 comme racine de P est exactement 2.

3) Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice n°3 *(5 points)*

On se propose de déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2+1)=[P(X)]^2+1 \qquad \text{et} \qquad P(0)=0$$

où $P(X^2+1)$ désigne le polynôme obtenu en substituant X^2+1 à la variable X dans le polynôme P.

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'entiers naturels définie par : $a_0=0$ et $a_{n+1}=a_n^2+1$ pour $n\in\mathbb{N}$.
Montrer que cette suite est strictement croissante.

2) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2+1)=[P(X)]^2+1$ et $P(0)=0$. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $P(a_n)=a_n$.

3) En déduire que X est le seul polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2+1)=[P(X)]^2+1$ et $P(0)=0$.

Exercice n°4 *(5 points)*

On considère dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles : $F=\dfrac{2X^2-1}{X^3+1}$ et $G=\dfrac{X+2}{X^4(X^3+1)}$.

1) a) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de F.
b) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.

2) Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.