Université de Rennes 1,
UFR de Mathématiques

Mai 2015

Algébre et Arithémétique 2

Session principale (Durée : 2 heures)
Calculatrices et documents prohibés.

Le sujet comporte sept exercices indépendants, vous devez en choisir six.
La rédaction et la présentation **seront prises en compte**. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (5 points)
On considère l'anneau des polynômes à coefficients réels de la variable X : $\mathbb{R}[X]$.
Soit $Q_0(X)$ l'élément suivant : $Q_0(X) = X^2 + X + 3$.

1) (1 point) Justifier pourquoi le polynôme $Q_0(X)$ est un élément irréductibe.
2) (1 point) Soit $P(X)$ un élément arbitraire de $\mathbb{R}[X]$.
   Donner les formes possibles du reste de la division euclidienne de P par Q_0.
3) (1,5 points) Soit $\mathbb{A}$ un anneau. Rappeler la définition d'un idéal $\mathbb{I}$ de $\mathbb{A}$.
   Décrire les éléments de l'idéal engendré par Q_0, on le note $< Q_0(X) >$.
4) (1,5 points) Soit l'anneau quotient $\mathbb{R}[X] \;\; / < Q_0(X) >$.
   Décrire la forme des éléments de cet anneau.

Exercice 2 (4 points)
Soit l'anneau des polynômes à coefficients réels de la variable X : $\mathbb{R}[X]$.
On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$(X + 3)P(X) = (X + 2)P(X + 2)$$

où P est un polynôme inconnu de $\mathbb{R}[X]$.

1) (1 point) Trouver deux racines évidentes de P .
2) (2,5 points) Démontrer que le polynôme P possède une infinité de racines.
3) (0,5 point) Conclure.

Exercice 3 (5 points)
On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les deux polynômes suivants :

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X + 2 \text{ et } Q(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 8$$

1) (1,5 points) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd unitaire de P et Q.
2) (1 point) En déduire deux polynômes U et V satisfaisant l'identité de Bezout.
3) (2,5 points) Plus généralement, soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.
   Si on considère P et Q comme des éléments de $\mathbb{C}[X]$, l'expression du pgcd change-t-elle ?

Exercice 4 (3 points)
On considère dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation d'inconnues P et Q suivante :

$$(X+1)\ \mathrm{pgcd}(P,Q) + X^2\ \mathrm{ppcm}(P,Q) = X^2 + X + 1$$

1) (1 point) On suppose que le pgcd(P,Q) est unitaire.
   Déterminer alors les seules expressions possibles pour ce dernier.
2) (1 point) Résoudre cette équation et trouver toutes les solutions possibles.
3) (1 point) Les résultats restent-ils inchangés dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 5 (2,5 points)
On considère dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation d'inconnue P suivante :

$$P^2 + (P'')^2 = X^3 P'$$

1) (1 point) Soit P une solution de cette équation.
   Déterminer les degrés possibles de P.
2) (1,5 points) Déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 6 (3 points) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6} \\[2ex] \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = \dfrac{-1}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{xyz} = \dfrac{-1}{6} \end{cases}$$

Exercice 7 (4 points)
On considère dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1}{X^4(X^2+2)}$$

1) (1 point) Donner dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition théorique en éléments simples de cette fraction.
2) (3 points) Calculer tous les coefficients intervenant dans cette décomposition.