UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 2

Correction de l'examen partiel

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 - 12X + 4$. Si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^2 = P$ alors

$$2 \deg Q = \deg P = 4$$

et le polynôme Q est nécessairement de degré 2. Comme P est unitaire, le coefficient dominant de Q est égal à 1 ou -1. Comme $Q^2 = (-Q)^2$ quitte à remplacer Q par $-Q$, on peut supposer que Q est unitaire. Comme par ailleurs le coefficient constant de P est égal à 4, celui de Q ne peut être que 2 ou -2. Ainsi Q est nécessairement un polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + 2$ ou $X^2 + \alpha X - 2$ avec α dans $\mathbb{C}$.

Dans le premier cas

$$P = Q^2 = (X^2 + \alpha X + 2)^2 = X^4 + 2\alpha X^3 + (\alpha^2 + 4)X^2 + 4\alpha X + 4$$

ce qui impose $\alpha = -3$ puis $b = \alpha^2 + 4 = 13$ et $a = \alpha = -3$.

Dans le second cas

$$P = Q^2 = (X^2 + \alpha X - 2)^2 = X^4 + 2\alpha X^3 + (\alpha^2 - 4)X^2 - 4\alpha X + 4$$

ce qui impose $\alpha = 3$ puis $b = \alpha^2 - 4 = 5$ et $a = \alpha = 3$.

Finalement il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q^2 = P$ si et seulement si $(a, b) = (-3, 13)$ ou $(a, b) = (3, 5)$.

Exercice 2

Nous allons montrer que les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $X^2P'' - (X+1)P' + P = 0$ sont exactement les polynômes de la forme $a(1 + X)$ avec $a \in \mathbb{C}$. Si P est de cette forme, alors $P'' = 0$, $P' = a$ et l'on a bien

$$X^2P'' - (X+1)P' + P = 0.$$

Réciproquement soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^2P'' - (X+1)P' + P = 0$. On peut écrire P sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où n est un entier que l'on peut supposer $\geqslant 2$ et $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes. Comme

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \qquad P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2},$$

on a

$$\begin{aligned}X^2P''-(X+1)P'+P &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^k - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k + \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \\ &= (a_0-a_1)-2a_2X+\sum_{k=2}^{n-1}((k-1)^2a_k-(k+1)a_{k+1})X^k+(n-1)^2a_nX^n.\end{aligned}$$

Or un polynôme est nul si et seulement tous ses coefficients le sont. On a donc $a_1 = a_0$, $a_2 = 0$, $a_n = 0$ et pour tout $k \in \{2,\dots,n-1\}$

$$a_{k+1} = \frac{(k-1)^2 a_k}{k+1}.$$

Ceci montre que $a_k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ et que $a_0 = a_1$. Finalement $P = a_0(1+X)$ ce qui conclut.

Exercice 3

Considérons le polynôme $P = X^n(1-X)^n$ de $\mathbb{R}[X]$. Il s'agit du produit des polynômes $A = X^n$ et $B = (1-X)^n$. La formule de Leibniz assure que le n-ème polynôme dérivé de P est donné par

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)} B^{(n-k).}$$

Comme

$$\begin{aligned}A^{(k)} &= \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \\ B^{(n-k)} &= (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(1-X)^k = (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jX^j\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}P^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-k+j}\binom{n}{k}\binom{k}{j}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}X^{n-k+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{n-k+j}n!\binom{n}{k}^2\binom{k}{j}X^{n-k+j}.\end{aligned}$$

Le coefficient de X^n dans $P^{(n)}$ est donc égal à

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Par ailleurs, en utilisant la formule du binôme, on voit que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n+k}.$$

En dérivant n fois cette expression, on obtient

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} X^k$$

ce qui montre que le coefficient de X^n dans $P^{(n)}$ est également donné par

$$(-1)^n \frac{2n!}{n!} = (-1)^n n! \binom{2n}{n}.$$

En comparant les deux expressions obtenues, on obtient l'égalité souhaitée :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 4

On considère les polynômes $A = X^4 + X^3 + X$ et $B = X^3 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Montrons que le p.g.c.d unitaire de A et B est égal à 1 et déterminons des polynômes $U_0, V_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U_0 A + V_0 B = 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ en utilisant l'algorithme d'Euclide. Posons $R_0 = A$, $R_1 = B$, $S_0 = 1, S_1 = 0$, $T_0 = 0, T_1 = 1$ de sorte que

$$R_0 = S_0 A + T_0 B \qquad R_1 = S_1 A + T_1 B$$

et posons les divisions euclidiennes successives :
<u>première division :</u>

$$\begin{array}{l|l} X^4+X^3+X & X^3+X+1 \\ \cline{2-2} X^4+X^2+1 & X+1 \\ \hline X^3-X^2 & \\ X^3+X+1 & \\ \hline -X^2-X-1 & \end{array} \qquad \begin{cases} R_0 = Q_1 R_1 + R_2 \\ Q_1 = X+1 \\ R_2 = -X^2 - X - 1 \\ S_2 = S_0 - Q_1 S_1 = 1 \\ T_2 = T_0 - Q_1 T_1 = -X - 1 \end{cases}$$

<u>seconde division :</u>

$$\begin{array}{l|l} X^3+X+1 & -X^2-X-1 \\ \cline{2-2} X^3+X^2 & -X+1 \\ \hline -X^2+X+1 & \\ -X^2-X-1 & \\ \hline X+2 & \end{array} \qquad \begin{cases} R_1 = Q_2 R_2 + R_3 \\ Q_2 = -X+1 \\ R_3 = X+2 \\ S_3 = S_1 - Q_2 S_2 = X - 1 \\ T_3 = T_1 - Q_2 T_2 = -X^2 + 2 \end{cases}$$

<u>troisième division :</u>

$$\begin{array}{l|l} -X^2-X-1 & X+2 \\ \cline{2-2} -X^2-2X & -X+1 \\ \cline{1-1} X-1 & \\ X+2 & \\ \cline{1-1} -3 & \end{array} \qquad \begin{cases} R_2 = Q_3R_3 + R_4 \\ Q_3 = -X+1 \\ R_4 = -3 \\ S_4 = S_2 - Q_3S_3 = X^2-2X+2 \\ T_4 = T_2 - Q_3T_3 = -X^3+X^2+X-3 \end{cases}$$

Ceci montre que le p.g.c.d. unitaire des polynômes A et B est égal à 1 et que

$$S_4A + T_4B = -3.$$

Les polynômes

$$U_0 = -\tfrac{1}{3}(X^2-2X+2)$$

et

$$V_0 = \tfrac{1}{3}(X^3-X^2-X+3)$$

vérifient donc l'égalité $U_0A + V_0B = 1$.

Soient $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que $AU + BV = 1$. Alors $A(U_0 - U) = B(V - V_0)$. Ainsi A divise $B(V - V_0)$ et comme A et B sont premiers entre eux, le lemme de Gauß assure que A divise $V - V_0$. Il existe donc un polynôme $C \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V = V_0 + AC$, ce qui donne $A(U_0 - U) = ABC$ et donc $U = U_0 - BC$ puisque A est non nul. Réciproquement si il existe $C \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U = U_0 - BC$ et $V = V_0 + AC$, alors

$$AU + BV = AU_0 - ABC + BV_0 + ABC = AU_0 + BV_0 = 1.$$

Ainsi un couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifie $AU + BV = 1$ si et seulement si il existe un polynôme $C \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U = U_0 - BC$ et $V = V_0 + AC$.