UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 2

Contrôle continu du 10 mars 2016

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Les exercices sont entièrement indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Durée : 2 heures.

Questions de cours *(3 points)*

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Démontrer que $AB = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

2) Quand dit-on que deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux ?

3) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Démontrer que s'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$ alors A et B sont premiers entre eux.

Exercice n°1 *(3 points)*

Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 - 12X + 4$. Pour quelles valeurs de a et b existe-t-il un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$?

Exercice n°2 *(2,5 points)*

Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $X^2P'' - (X+1)P' + P = 0$.

Exercice n°3 *(5 points)*

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée d'ordre n du polynôme $X^n(1-X)^n$ de $\mathbb{R}[X]$

a) en utilisant la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit.

b) en développant au préalable $(1-X)^n$ par la formule du binôme.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. *(On pourra identifier les coefficients de X^n dans les deux expressions obtenues.)*

Exercice n°4 *(6,5 points)*

On considère les polynômes $A = X^4 + X^3 + X$ et $B = X^3 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

1) Calculer le pgcd (unitaire) D de A et B.

2) Trouver deux polynômes U_0 et V_0 tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.

3) Soient U et V deux polynômes tels que $AU + BV = 1$. Montrer que A divise $V - V_0$.

4) Trouver tous les polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.