Quelques exercices

4 Avril 2014

Exercice 1

Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3,
$3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2,
X^4-X^3+X-2 par X^2-2X+4.

Réponse

Exercice 2

Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$X^2-3iX-5(1+i)$ par $X-1+i$,
$4X^3+X^2$ par $X+1+i$.

Réponse

Exercice 3

Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n+X+1 par le polynôme $(X-1)^2$.

Réponse

Exercice 4

Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Réponse

Exercice 5

Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4+X^3-2X+1 \text{ par } X^2+X+1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Réponse

Exercice 6

Effectuer les divisions suivant les puissances croissantes de :

1. $P=1$ par $Q=1-X$, à l'ordre n,
2. $P=1+X$ par $Q=1+X^2$ à l'ordre 5,
3. $P=X-\frac{X^3}{6}+\frac{X^5}{12}$ par $Q=1-2X^2+X^4$ à l'ordre 5.

Exercice 7

Soit $A=X^6-2X^4+X^3+1$ et $B=X^3+X^2+1$. Effectuer :

1. La division euclidienne de A par B.
2. La division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre 4.

Réponse

Exercice 8

Calculer le pgcd de P et Q pour :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$
   $Q = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$
   $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$
3. $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$
   $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$

Réponse

Exercice 9

Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U, V \in K[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

1. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$
   $Q = X^2 + X + 1$
2. $P = X^3 + X^2 + 1$
   $Q = X^3 + X + 1$

Réponse

Exercice 10

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que les restes des divisions de P par $X^2 + 1$ et $X^2 - 1$ valent respectivement $2X - 2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de P par $X^4 - 1$?

Réponse

Exercice 11

Calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Réponse

Exercice 12

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$

Réponse

Exercice 13

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X + 2)^3$ et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X - 2)^3$.

Réponse

Exercice 14

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse

Exercice 15

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Réponse

Exercice 16

Déterminer les racines rationnelles de $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$ et le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases}$$

Réponse

Exercice 18

Soient x, y, z les racines de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $x^4 + y^4 + z^4$.

Réponse

Exercice 19 Équations fonctionnelles

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$.

Réponse

Exercice 20

Soit $P = X^3 + 6X^2 - 16$.

1. Déterminer la suite de Sturm de P.
2. Combien a-t-il de racines réelles dans l'intervalle]-6,2[?
3. Combien a-t-il de racines réelles positives ? de racines réelles négatives ?

Réponse

Exercice 21

Soit $P = X^5 - X^4 + 3X^3 + 9X^2 - X + 5$.

1. Que peut-on dire sur le nombre de racines de P, en utilisant la règle de Descartes ?
2. La suite de Sturm de P est $\left(P_0, P_1, P_2, -\frac{31250}{169}X^2 + \frac{1400}{169}X - \frac{25375}{169}, -\frac{6487741}{9765625}X + \frac{478608}{1953125}, \frac{42900302734375}{249057889249}\right)$.
   Déterminer P_0, P_1 et P_2.
3. Montrer que $P(x) > 0$ si $x \geq 2$ et que $P(x) < 0$ si $x \leq -2$. Déterminer le nombre de racines réelles (distinctes) de P.

Réponse

Exercice 22

Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(-2) = 3, \qquad P(0) = -1 \quad \text{et} \quad P(1) = -2$$

Réponse

Exercice 23

Trouver un polynôme P de degré minimum tel que

$$P(-1) = -2, \qquad P(0) = 1, \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

Réponse

Exercice 24

Décomposition en éléments simples $F=\dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

Réponse

Exercice 25

Décomposition en éléments simples $F=\dfrac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

Réponse

Exercice 26

Décomposition en éléments simples $F=\dfrac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}$.

Réponse

Exercice 27 (Poly Exercice 3.13)

Décomposition en éléments simples :

(a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

(b) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(c) $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$

(d) $\dfrac{X(X^6-1)}{(X^2-1)^3}$

(e) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

(f) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$

(g) $\dfrac{X^2}{(X-1)^2(X+1)^3}$

(h) $\dfrac{X^2+1}{((X-1)(X-2)(X-3))^2}$

(i) $\dfrac{-12X}{X^6-14X^4+49X^2-36}$

(j) $\dfrac{1}{(X^3+3X^2+2X)^4}$

Réponse

Exercice 28 (Poly Exercice 3.14)

Exemples de décomposition en éléments simples de première et de seconde espèces, dans $\mathbb{R}(X)$:

(a) $\dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^3}$

(b) $\dfrac{2X^5+19X^4+76X^3+157X^2+165X+72}{(X^2+4X+5)^3}$

(c) $\dfrac{X^6-2X^5+4X^4-6X^3-X^2+8X+121}{(X-1)^3(X^2+4)}$

(d) $\dfrac{1}{(X-1)^5X(X^2+1)}$

(e) $\dfrac{X^9}{(X^2-1)^3(X^2+X+1)^2}$

(f) $\dfrac{4(X^6+2)}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$

(g) $\dfrac{X}{(X^2-1)(X^2+1)^3}$

Réponse

Exercice 29 (Poly Exercice 3.15)

Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X-X^3}{(1+X^4)(1+X^2)^4} \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}$$

Réponse

Exercice 30 (Poly Exercice 3.16)

Décomposer sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3-4X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^2+4)} \quad \text{et} \quad \frac{X^5+5}{(X+1)^5-X^5-1}$$

Réponse

Exercice 31 (Poly Exercice 3.17)

Décomposer sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X^{2n}-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^{2n+1}-1}$$

Réponse

Exercice 32

1. Décomposer $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
6. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
7. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
8. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
9. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
10. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Réponse

Exercice 33

A l'aide de décomposition en éléments simples, calculer :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Réponse

Exercice 34 Division de X^3-1 par X^2+1

1. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de X^3-1 par X^2+1 à l'ordre 3.
2. En déduire une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.

Réponse

Réponse: l'exercice 1

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$, le quotient de A par B est $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste $-47 - 41X$.
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$ le quotient de A par B est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $7 - 9X^2 - X$.
3. $A = X^4 - X^3 - X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$, le quotient de A par B est $X^2 + X - 2$ et le reste $6 - 9X$.

Réponse: l'exercice 2

1. Le quotient de A par B est $X + 1 - 4i$ et le reste $-8 - 10i$.
2. Le quotient de A par B est $4X^2 + (-3 - 4i)X - 1 + 7i$ et le reste est $8 - 6i$.

Réponse: l'exercice 4

Ce sont les polynômes de la forme $c(X-a)^k$, avec $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Réponse: l'exercice 3

le reste est égal à $(n+1)X + (2-n)$.

Réponse: l'exercice 5

$X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 1) + X^3(2 - X)$.

Réponse: l'exercice 7

1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.
2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1 + 2X + X^2)$.

Réponse: l'exercice 8

1. $X + 1$
2. 1
3. $X^2 - iX + 1$

Réponse: l'exercice 9

1. $7U = X + 3, \quad 7V = -X^3 - 3X^2 + X + 4$
2. $3U = 2X^2 - X + 1, \quad 3V = -2X^2 - X + 2$

Réponse: l'exercice 10

$-3X^3 + X^2 - X - 1$.

Réponse: l'exercice 11

1. $\text{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$.
2. $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1$.

Réponse: l'exercice 12

1. $P(i) = (i^2 - i + 1)^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = 0$.
2. Comme P est à coefficients réels, $-i$ est aussi racine de P.

Réponse: l'exercice 13

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P+10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P+10)'=P'$ d'ordre au moins deux.
De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un nombre complexe a tel que $P'=a(X-2)^2(X+2)^2=a(X^4-8X^2+16)$ et comme P est une primitive de P' on a nécessairement
$P=a\left(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X\right)+b$ avec $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$.
D'autre part $P+10$ divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ est divisible par $(X-2)^3 \Rightarrow P(-2)+10=0$ et $P(2)+10=0$ $\Rightarrow P(-2)=-10$ et $P(2)=10$, d'où

$$\begin{cases} a(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}-32)+b=-10 \\ a(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32)+b=10 \end{cases} \Rightarrow b=0 \text{ et } a\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)=10 \Rightarrow a=\frac{75}{128} \text{ et } b=0.$$

Ainsi, $P=\frac{75}{128}(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)=\frac{15}{128}X^5-\frac{25}{16}X^3+\frac{75}{8}X.$

Réponse: l'exercice 14

$$P(X)=1+\left(\frac{X}{2}\right)+\left(\frac{X}{2}\right)^2+\left(\frac{X}{2}\right)^3+\left(\frac{X}{2}\right)^4+\left(\frac{X}{2}\right)^5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-(\frac{X}{2})^6}{1-\frac{X}{2}}=0 & \text{si } \frac{X}{2}\neq 1 \\ 6 & \text{si } \frac{X}{2}=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{X}{2})^6=1 & \text{si } X\neq 2 \\ 6 & \text{si } X=2. \end{cases}$$

Or $\left(\dfrac{X}{2}\right)^6=1 \Leftrightarrow X_k=2e^{\frac{2ik\pi}{6}}=2e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$,
ce qui donne $X_0=2$, $X_1=2e^{\frac{i\pi}{3}}=-2\overline{j}=-2j^2$, $X_2=2e^{\frac{2i\pi}{3}}=2j$, $X_3=2e^{i\pi}=-2$, $X_4=2e^{\frac{4i\pi}{3}}=2j^2$, $X_5=2e^{\frac{5i\pi}{3}}=-2j$.
Les 5 racines de P sont donc $X_1=-2j^2$, $X_2=2j$, $X_3=-2$, $X_4=2j^2$ et $X_5=-2j$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=\frac{1}{32}(X+2j^2)(X-2j)(X+2)(X-2j^2)(X+2j)$$

Maintenant, pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les facteurs dont les racines sont conjuguées, :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32}(X+2)(X-2j)(X-2j^2)(X+2j^2)(X+2j) \\ &= \frac{1}{32}(X+2)(X^2-2(j+j^2)X+4j^3)(X^2+2(j+j^2)X+4j^3) \\ &= \frac{1}{32}(X+1)(X^2+2X+4)(X^2-2X+4) \end{aligned}$$

Réponse: l'exercice 15

1. $X^6+1=-\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.
2. $X^9+X^6+X^3+1=-\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Réponse: l'exercice 16

$(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Réponse: l'exercice 17

On a $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+xz+yz}{xyz}$ d'où $xy+xz+yz=-4$

$$\begin{aligned} (x,y,z) \text{ solution de } S &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=-4 \\ xyz=-4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } X^3-X^2-4X+4=0 \\ &\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } (X-1)(X-2)(X+2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)\} \end{aligned}$$

Réponse: **l'exercice 19**

Soit c est une racine de P, alors $P(c^2) = -P(c)P(c+2) = 0$, d'où c^2 est racine de P. De même $P((c-2)^2) = -P(c-2)P(c) = 0$, d'où $(c-2)^2$ est racine de P.
Supposons $P \neq 0$, alors ne peut avoir comme

1) Si $|c| \notin \{0,1\}$, alors P a une infinité de racines distinctes à savoir la suite $(c^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et donc $P = 0$.
De même si $|c-2| \notin \{0,1\}$, alors P a une infinité de racines distinctes à savoir la suite $((c-2)^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et donc $P = 0$.
2) Si $|c| = 0$ ou $|c-2| = 0$, alors $c-2 = 2$ ou $c = 2$ et donc $P = 0$.

3) Il ne reste plus que le cas où $|c| = |c-2| = 1$ qui entraîne $c = 1$, donc P n'a qu'une seule racine, comme il est scindé, il existe $K \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $P = K(X-1)^n$.
Alors $0 = P(X)P(X+2)+P(X^2) = K(X-1)^n K(X+1)^n + K(X^2-1) = K^2(X^2-1)^n + K(X^2-1)^n = K(K+1)(X^2-1)^n$ on déduit que $K = 0$ ou $K = -1$.

Les solutions sont donc $P = 0$ ou $P = -(X-1)^n$.

Réponse: **l'exercice 18**

Pour $1 \le k \le 4$, posons $S_k = x^k + y^k + z^k$. On, on a $x^3+2x-1 = 0$ et donc $x^4+2x^2-x = 0$, de même on aura $y^4+2y^2-y = 0$ et $z^4+2z^2-z = 0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4+2S_2-S_1 = 0$ et donc
$x^4+y^4+z^4 = S_4 = -2((x+y+z)^2-2(xy+xz+yz))+(x+y+z) = (-2)(-2.2) = 8$.

Réponse: **l'exercice 20**

1) La suite de Sturm de P est $(P, 3x^2+12X, 8X+16, 12)$.
2) On vérifie que -6 et 2 ne sont pas des racines de P; puis on calcule les nombres de changement de signe : $v_P(-6) = v(-1,+1,-1,+1) = 3$ et $v_P(2) = v(+1,+1,+1,+1) = 0$. Par conséquent, P à $v_P(-6)-v_P(2) = 3$ racines réelles.
3) On calcule le nombre de changement de signe en 0 $v_P(0) = v(-1,0,+1,+1) = v(-1,+1,+1) = 1$. Comme $v_P(0)-v_P(2) = 1$ et $v_P(-6)-v_P(0) = 2$, P a une racine positive située dans $]0,2[$ et deux racines négatives situées dans $]-6,0[$.
Remarque : On aurait pu aussi utilisé la règle de Descartes. En effet, $v(1,6,-16) = 1$, entraîne que P a une racines strictement positive. En appliquant la règle de Descartes à $Q(x) = P(-X) = -X^3+6X^2-16$, on trouve que P a au plus deux racines strictement négatives, d'après ce qui précède et le fait que $P(0) = -16 \neq 0$, P a exactement deux racines strictement négatives.

Réponse: **l'exercice 21**

1) Le nombre de changement de signe dans la suite des coefficients de P est $v(1,-1,3,9,-1,5) = 4$, d'après la règle de Descartes P a 0, 2 ou 4 racines strictement positives (comptées avec multiplicité). En appliquant la règle de Descartes à $Q(X) = P(-X) = -X^5-X^4-3X^3+9X^2+X+5$, on trouve que P à exactement une racine strictement négative (comptées avec multiplicité).
2) La suite de Sturm de P est $P_0 = P = X^5-X^4+3X^3+9X^2-X+5$
$P_1 = P' = 5X^4-4X^3+9X^2+18X-1$
$P_2 = -\frac{26}{25}X^3 - \frac{144}{25}X^2 + \frac{2}{25}X - \frac{124}{25}$

3) Si $x \ge 2$, on a $P(x) = x^5-x^4+3x^3+9x^2-x+5 = x^4(x-1)+3x^3+x(9x-1)+5 > 16+24+34+5 > 0$.
Si $x \le -2$, on a $P(x) = x^5-x^4+3x^3+9x^2-x+5 = (x^5-x^4+9x^2)+(x^3-x)+(2x^3+5) = x^2(x^3-x^2+9)+x(x^2-1)+(2x^3+5) \le 4(-8-4+9)+(-2)(4-1)+(-2.8+5) < 0$.
Le calcul du nombre de changement de signe en -2 et $+2$ donne $v_P(-2) = 3$ et $v_P(2) = 2$. D'où $v_P(-2)-v_P(2) = 1$, donc P a une racine réelle et elle est localisée dans l'intervalle $]-2,-2[$.
Remarque : $v_P(-1) = v(+1,-1,-1,-1,+1,+1) = 2$, donc la racine réelle de P est dans l'intervalle $]-2,-1[$.

Réponse: **l'exercice 22**

La formule d'interpolation de Lagrange nous donne $P = 3\frac{(X-0)(X-1)}{(-2-0)(-2-1)} - \frac{(X+2)(X-1)}{(0+2)(0-1)} - 2\frac{(X+2)(X-0)}{(1+2)(1-0)} = \frac{1}{3}(X^2-4X-3)$.

Réponse: **l'exercice 23**

La formule d'interpolation de Lagrange nous donne $P = -2\frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 4\frac{(X+1)(X-0)(X-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}(3X^3 - 4X^2 - X + 2)$.

Réponse: **l'exercice 24**

La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne : $F = x+1+F_1$ avec $F_1 = \frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
Puis on factorise le dénominateur. Alors le type de décomposition de F_1 est :

$$F_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

On obtient alors A en multipliant les deux membres de (1) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$). On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$). Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$ ou en multipliant les deux membres de (1) par x et en passant à la limite pour $x \to \infty$ ($B = 4$). On obtient

$$F = \frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2} = x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

Réponse: **l'exercice 25**

La division euclidienne donne : $F = 2+F_1$ avec

$$F_1 = \frac{4x^4-10x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}.$$

La méthode de l'exercice précédent permet d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais il reste encore 3 coefficients à déterminer. On peut effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3, qui est l'exposant du facteur x du numérateur $1-4x+8x^2-10x^3+4x^4$ par $(x-1)^2 = 1-2x+x^2$:

$$1-4x+8x^2-10x^3+4x^4 = (1-2x+x^2)\times(1-2x+3x^2)+x^3(-2+x). \tag{2}$$

En divisant les deux membres de (2) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$F_1 = \frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Ainsi

$$F = \frac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = 2+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}.$$

Réponse: **l'exercice 26**

La forme de la décomposition en éléments simple de F :

$$F = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}. \tag{3}$$

On peut utiliser les exercices précédents, pour montrer que $A = 3$, puis $B = 1$ et $C = 1$ (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (3) par x^2+1, puis limite quand x tend vers i, avec séparation des parties réelle et imaginaire), puis on fait la soustraction $F_1 = F - \frac{A}{x} - \frac{Bx+C}{(x^2+1)^3} = F - \frac{3}{x} - \frac{x+1}{(x^2+1)^3} = \frac{3x^2+x+1}{(x^2+1)^2}$, et par suite la décomposition de F_1 donne

$$F_1 = \frac{3}{(x^2+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+1}.$$

d'où

$$F = \frac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3} = \frac{3}{x}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{3}{(x^2+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+1}.$$

Réponse: **l'exercice 27**

(a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}=1-\dfrac{8}{X-1}+\dfrac{13}{X-2}$, (b) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}=\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{-5}{X-2}+\dfrac{5}{X-3}$

(c) $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}=1+\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{2}{(X-1)^2}+\dfrac{3}{(X-1)^3}-\dfrac{1}{X-2}$

(d) $\dfrac{X(X^6-1)}{(X^2-1)^3}=X+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(X+1)^2}$

(e) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}=\dfrac{5}{X}-\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{5}{X+1}-\dfrac{4}{(X+1)^2}$

(f) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}=\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X+1)^2}$

(g) $\dfrac{X^2}{(X-1)^2(X+1)^3}=\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{(X-1)}+\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(X-1)^2}-\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{(X+1)}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X+1)^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(X+1)^3}$

(h) $\dfrac{X^2+1}{((X-1)(X-2)(X-3))^2}=\dfrac{2}{(X-1)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{4}{(X-2)}+\dfrac{5}{(X-2)^2}-\dfrac{6}{(X-3)}+\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{(X-3)^2}$

(i) $\dfrac{-12X}{X^6-14X^4+49X^2-36}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{X-2}+\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{X+2}-\dfrac{3}{20}\dfrac{1}{X-3}-\dfrac{3}{20}\dfrac{1}{X+3}$

$$(j)\quad \frac{1}{(X^3+3X^2+2X)^4}=-\frac{105}{32}\frac{1}{X}+\frac{41}{32}\frac{1}{X^2}-\frac{3}{8}\frac{1}{X^3}+\frac{1}{16}\frac{1}{X^4}+\frac{4}{(X+1)^2}+\frac{1}{(X+1)^4}$$
$$+\frac{105}{32}\frac{1}{X+2}+\frac{41}{32}\frac{1}{(X+2)^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{(X+2)^3}+\frac{1}{16}\frac{1}{(X+2)^4}$$

Réponse: l'exercice 28

(a) $\dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^3}=\dfrac{X-2}{X^2+X+1}+\dfrac{X+3}{(X^2+X+1)^2}+\dfrac{-X-1}{(X^2+X+1)^3}$

(b) $\dfrac{2X^5+19X^4+76X^3+157X^2+165X+72}{(X^2+4X+5)^3}=\dfrac{2X+3}{(X^2+4X+5)}-\dfrac{1}{(X^2+4X+5)^2}+\dfrac{-X+2}{(X^2+4X+5)^3}$

(c) $\dfrac{X^6-2X^5+4X^4-6X^3-X^2+8X+121}{(X-1)^3(X^2+4)}=X+1-\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{10}{(X-1)^2}+\dfrac{25}{(X-1)^3}+\dfrac{X+11}{X^2+4}$

$$(d)\quad \frac{1}{(X-1)^5X(X^2+1)}=\frac{-1}{X}+\frac{9}{8}\frac{1}{X-1}-\frac{5}{4}\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{5}{4}\frac{1}{(X-1)^3}$$
$$-\frac{1}{(X-1)^4}+\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^5}+\frac{1}{8}\frac{(-X+1)}{X^2+1}$$

$$(e)\quad \frac{X^9}{(X^2-1)^3(X^2+X+1)^2}=X-1+\frac{103}{144}\frac{1}{X-1}+\frac{13}{48}\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{24}\frac{1}{(X-1)^3}+\frac{33}{16}\frac{1}{X+1}$$
$$-\frac{13}{16}\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{(X+1)^3}+\frac{1}{9}\frac{2X+1}{X^2+X+1}$$

(f) $\dfrac{4(X^6+2)}{(X-1)^3(X^2+1)^2}=\dfrac{9}{X-1}+\dfrac{3}{(X-1)^3}+\dfrac{-5X+3}{X^2+1}+\dfrac{-X+1}{(X^2+1)^2}$

(g) $\dfrac{X}{(X^2-1)(X^2+1)^3}=\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{8}\dfrac{X}{X^2+1}-\dfrac{1}{4}\dfrac{X}{(X^2+1)^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{X}{(X^2+1)^3}$

Réponse: **l'exercice 29**

$$\frac{X-X^3}{(1+X^4)(1+X^2)^4}=\frac{1}{8}\frac{X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}+\frac{1}{8}\frac{X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}-\frac{1}{4}\frac{X}{X^2+1}+\frac{1}{2}\frac{X}{(X^2+1)^3}+\frac{X}{(X^2+1)^4}$$

$$\frac{X^2}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}=-\frac{2}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^3}+\frac{2X}{X^2+X+1}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$$

Réponse: **l'exercice 30**

1) la décomposition sur $\mathbb{R}$

$$\frac{X^3-4X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{1}{3}\frac{X+5}{X^2+1}-\frac{1}{3}\frac{2X-17}{X^2+4}$$

et celle sur $\mathbb{C}$

$$\frac{X^3-4X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{1}{6}\frac{1-5i}{(X-i)}+\frac{1}{6}\frac{1+5i}{(X+i)}-\frac{1}{12}\frac{4+17i}{(X-2i)}+\frac{1}{12}\frac{4-17i}{(X+2i)}$$

2) la décomposition sur $\mathbb{R}$

$$\frac{X^5+5}{(X+1)^5-X^5-1}=\frac{1}{5}(X-2)+\frac{1}{X}-\frac{4}{5}\frac{1}{(X+1)}+\frac{1}{5}\frac{X-4}{(X^2+X+1)}$$

et celle sur $\mathbb{C}$

$$\frac{X^5+5}{(X+1)^5-X^5-1}=\frac{1}{5}(X-2)+\frac{1}{X}-\frac{4}{5}\frac{1}{(X+1)}+\frac{1}{5}\frac{a}{(X-j)}+\frac{1}{5}\frac{\bar{a}}{(X-\bar{j})}$$

avec $a=\frac{1}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Réponse: **l'exercice 31**

1)La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
On suppose $k\neq 0$ et on pose $\omega=e^{\frac{2i\pi}{k}}$.
Alors $1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{k-1}$, sont les racines de X^k-1, elle sont toutes simples d'où la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $F=\frac{1}{X^k-1}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\alpha_j}{X-\omega^j}$ et les coefficients α_j se calculent par la formule $\alpha_j=\frac{1}{(X^k-1)'_{|X=\omega^j}}=\frac{1}{k\omega^{j(k-1)}}=\frac{\omega^j}{k}$
Ainsi

$$F=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k}\frac{\omega^j}{X-\omega^j}.$$

2) La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

i) $\boxed{\text{Si } k=2n}$, on a pour $j\neq 0$ et $j\neq n$, $\omega^j\neq\omega^{2n-j}$ et $\omega^j.\omega^{2n-j}=\omega^{2n}=1$, d'où le conjugué de ω^j est alors ω^{2n-j}, et en regroupant les pôles conjugués dans la décomposition en éléménts simples de F dans $\mathbb{C}$ on obtient :

$$F=\frac{1}{2n}\frac{\omega^0}{X-\omega^0}+\frac{1}{2n}\frac{\omega^n}{X-\omega^n}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2n}\left(\frac{\omega^j}{X-\omega^j}+\frac{\omega^{2n-j}}{X-\omega^{2n-j}}\right).$$

Remarque : $\dfrac{a}{X-a}+\dfrac{\bar{a}}{X-\bar{a}}=\dfrac{(a+\bar{a})X-2|a|^2}{X^2-(a+\bar{a})X+|a|^2}$ et $(a+\bar{a})=2\operatorname{Re}(a)$. Si $a=\omega^j$, alors $\operatorname{Re}(a)=\cos(\frac{2j\pi}{k})$.
D'où $\dfrac{\omega^j}{X-\omega^j}+\dfrac{\omega^{2n-j}}{X-\omega^{2n-j}}=\dfrac{2\operatorname{Re}(\omega^j)X-2}{X^2-2\operatorname{Re}(\omega^j)X+1}$
On en déduit la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$:

$$F=\frac{1}{2n}.\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2n}.\frac{-1}{X+1}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2n}.\frac{2\operatorname{Re}(\omega^j)X-2}{X^2-2\operatorname{Re}(\omega^j)X+1}=F=\frac{1}{2n}.\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2n}.\frac{-1}{X+1}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2n}.\frac{2\cos(\frac{j\pi}{n})X-2}{X^2-2\cos(\frac{j\pi}{n})X+1}.$$

ii) $\boxed{\text{Si } k=2n+1}$, on a pour $j\in\{1,\ldots,n\}$, ω^{2n+1-j} est le conjugué de ω^j, on obtient comme dans i), la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$:

$$F=\frac{1}{2n+1}.\frac{1}{X-1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2n+1}.\frac{2\mathrm{Re}(\omega^j)X-2}{X^2-2\mathrm{Re}(\omega^j)X+1}=\frac{1}{2n+1}.\frac{1}{X-1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2n+1}.\frac{2\cos(\frac{2j\pi}{2n+1})X-2}{X^2-2\cos(\frac{2j\pi}{2n+1})X+1}.$$

Réponse: l'exercice 32

1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}=X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}$.
2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}=2X+7-\frac{3}{X-1}+\frac{19}{X-2}$.
3. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}=X^2+3+\frac{2}{X-1}-\frac{2}{X+1}$.
4. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}=1+\frac{3/4}{(X-1)^3}+\frac{3/2}{(X-1)^2}+\frac{37/16}{X-1}-\frac{1/8}{(X+1)^2}-\frac{5/16}{X+1}$.
5. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}=\frac{2+i}{X-i}+\frac{1-3i}{X+2i}$.
6. $\frac{X}{(X+i)^2}=\frac{1}{X+i}-\frac{i}{(X+i)^2}$.
7. $\frac{X^2+1}{X^4+1}=\frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
8. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}=\frac{1/2}{X-1}+\frac{1/6}{X+1}+\frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1}=\frac{1/2}{X-1}+\frac{1/6}{X+1}-\frac{\frac{1}{3}j}{X+j}-\frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
9. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}=\frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1}-\frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4}=\frac{1/6}{X-i}+\frac{1/6}{X+i}-\frac{1/6}{X-2i}-\frac{1/6}{X+2i}$.
10. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}=-\frac{4/3}{X^2+1}+\frac{7/3}{X^2+4}=\frac{\frac{2}{3}i}{X-i}+\frac{-\frac{2}{3}i}{X+i}+\frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i}+\frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Réponse: l'exercice 33

1) 1
2) $\frac{1}{4}$
3) $\frac{1}{2}$

Réponse: l'exercice 34

1. $X^3-1=(X^2+1)(X^3+X^2-1)-X^4(X+1)$.
2. $F(x)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\arctan x+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}$.
