Examen
Jeudi 24 Avril 2014
Durée 2h
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème est à titre indicatif.

Question de cours :(3 pts)

1. Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer qu'un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur un corps $\mathbb{K}$ si et seulement s'il n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

Exercice 1. (3 pts) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} deg(P) \leq 2 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 6 \\ P'(1) = 4. \end{cases}$$

Exercice 2. (4 pts) Soit $P(X) = 2X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X - 2$.

1. Montrer que si $c \in \mathbb{Q}$ est racine de P alors nécessairement $c \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.
   Quelles sont les racines rationnelles de P?
2. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité : $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 2 < 0$.

Exercice 3. (3 pts)
On pose $P = X^3 + 6X^2 - 16$.

1. Déterminer le nombre de racines de P dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Compléter la suite de Sturm de P : $(P, P_1, P_2, 12)$ i.e. calculer P_1 et P_2.
3. Calculer le nombre de changements de signes dans la suite de Sturm de P aux points -3 et 0. Que peut-on en déduire sur le nombre de racines réelles de P ?

Exercice 4. (4pts) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 2 que l'on cherche à déterminer.

1. Soit a,b,$c \in \mathbb{R}$, on suppose connues les valeurs de P aux points -1,0 et 1 : $\begin{cases} P(-1) = 2a \\ P(0) = b \\ P(1) = 2c. \end{cases}$

Tourner la page svp

1.1. Donner le polynôme de Lagrange L satisfaisant : $\begin{cases} L(-1) = 1 \\ L(0) = 0 \\ L(1) = 0. \end{cases}$

1.2. Exprimer P comme combinaison linéaire de polynômes de Lagrange.

1.3. Montrer que $P = (a - b + c)X^2 + (c - a)X + b$

2. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $a - b + c = 1$.

2.1. On suppose que le produit des racines de P, comptées avec multiplicités, vaut 1. Déterminer b.

2.2. On suppose encore en plus que P' divise P, déterminer les polynômes P possibles.

Exercice 5. (5pts) On considère la fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\mathrm{F} = \frac{24X^2 - 32}{(X-2)^2 X^2 (X+2)^2}.$$

1. Vérifier si F est paire ou impaire.
2. Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (justifier vos calculs).
3. Soit $N \geq 1$ un entier. Déduire de la décomposition précédente la valeur (en fonction de N) de la somme :

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{24n^2 - 32}{(n-2)^2 n^2 (n+2)^2}.$$

Indication : la décomposition de F *obtenue dans la question précédente est*

$$\mathrm{F} = \frac{1}{(X-2)^2} + \frac{1}{(X+2)^2} - \frac{2}{X^2}$$