Université de Rennes 1 L1 - AR2 : Algèbre et arithmétique 2
Année 2012-2013

Examen
Lundi 15 Avril 2013
Durée 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (3pts) Trouver le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 2. (3pts)
Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$.
Pour quelles valeurs de a et b existe-t-il un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$?
(On raisonnera en trouvant d'abord des conditions nécessaires sur le degré de Q.)

Exercice 3. (3pts)
Soient a,b et c des nombres réels distincts.

1. Soit P un polynôme de degré ≤ 2 tel que $P(a) = P(b) = P(c)$.
Expliquer pourquoi P est constant.
2. Déterminer la valeur de

$$\frac{(2013-b)(2013-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(2013-a)(2013-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(2013-b)(2013-a)}{(c-b)(c-a)}.$$

Exercice 4. (3pts) Soit $P = X^3 + X + 5$.

1. Montrer que si P n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ alors il admet une racine dans $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est racine de P alors nécessairement $\alpha \in \{-5, -1, 1, 5\}$.
3. En déduire que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 5. (4pts) Soit $P(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de P. On sait que $x_1 + x_2 = 2$.

1. Calculer la valeur de $x_3 + x_4$.
2. Démontrer que $x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0$.
En déduire la valeur de $x_1x_2 + x_3x_4$.

Tourner la page svp

3. Montrer que $x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-12$.
   En déduire les valeurs de x_1x_2 et x_3x_4.
4. Montrer que x_1 et x_2 sont racines du polynôme X^2-2X+5 et déterminer leurs valeurs.
5. Déterminer les valeurs de x_3 et x_4.

Exercice 6. (4pts) On pose

$$P=X^5-8X^3+3X^2+4X+12,\ Q=X^3-2X^2+X-2 \text{ et } F=\frac{Q}{P}.$$

1. Déterminer les racines rationnelles de P ainsi que leurs multiplicités.
2. En déduire une décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer le PGCD unitaire D de P et Q.
4. Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.
5. **Question Bonus :** En déduire une primitive de $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^5-8x^3+3x^2+4x+12}$.