Corrigé de l'examen du lundi 15 Avril 2013

Exercice 1. Comme $X^2 - 3X + 2$ est de degrés 2, le reste est nécessairement de degré 1. On commence par écrire le résultat de la division euclidienne : $(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + \lambda X + \mu$, où λ et μ sont deux réels. On évalue ensuite la relation en les racines du diviseur $X^2 - 3X + 2$ est, qui sont 1 et 2. On trouve alors $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 2^n - 2 \\ 2\lambda + \mu & = & 3^n - 2^n - 1. \end{array} \right.$

On résoud le système pour trouver λ et μ, on obtient : $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ \mu & = & -3^n + 2^{n+1} + 2^n - 3. \end{array} \right.$

Exercice 2. Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1. On peut donc écrire $Q(X) = X^2 + \lambda X + \mu$. On a alors $Q^2(X) = X^4 + 2\lambda X^3 + (2\mu + \lambda^2)X^2 + 2\lambda\mu X + \mu^2$. Par identification, on doit avoir $2\lambda = 2a$, $2\mu + \lambda^2 = b$, $2\lambda\mu = 2$ et $\mu^2 = 1$. On aura donc $\lambda\mu = 1$ et $\mu = \pm 1$.
D'où, si $\mu = 1$, alors $\lambda = 1$, $a = 1$ et $b = 3$ et $P(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2$
Si $\mu = -1$, alors $\lambda = -1$, $a = -1$ et $b = -1$ et $P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2$.

Exercice 3.

1. Notons $C = P(a) = P(b) = P(c)$. Le polynôme $P - C$ est de degré inférieur ou égal à 2 et a trois racines a, b et c, c'est donc le polynôme nul. Ainsi $P = C$ est le un polynôme constant.
2. Posons $P = \dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{(X-b)(X-a)}{(c-b)(c-a)}$. La quantité recherchée est alors $P(2013)$.
   Comme P est un polynôme de degré 2 tel que $P(a) = P(b) = P(c) = 1$, d'après 1., P est constant, ainsi $P(2013) = 1$.

Exercice 4. Soit $P = X^3 + X + 5$.

1. Si P n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors $P = P_1.P_2$, avec $P_1.P_2 \in \mathbb{Q}[X]$, $deg(P_1) \geq 1$ et $deg(P_2) \geq 1$. Comme $3 = deg(P) = deg(P_1) + deg(P_2)$, nécessairement P_1 ou P_2 est de degré 1, d'où P admet une racine dans $\mathbb{Q}$.
2. Les racines rationnelles de P sont de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux, $p > 0$, p diviseur de 5 et q diviseur de 1. Les candidats sont donc $1, -1, 5$ et -5.
3. Comme $P(-1) = 2$, $P(1) = 7$, $P(-5) = -125$ et $P(5) = 135$, P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ et d'après 1., il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 5. Soit $P(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de P.

1. On a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -$ coefficient de $X^3 = 0$, d'où $x_3 + x_4 = -2$.
2. On a $x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 =$ coefficient de $X^2 = 0$. D'où $x_1x_2 + x_3x_4 = -(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 4$.
3. On a $x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -$ coefficient de $X = -12$.
   D'où x_1x_2 et x_3x_4 sont solutions du sytème $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1x_2 + x_3x_4 & = & 4 \\ -2x_1x_2 + 2x_3x_4 & = & -12. \end{array} \right.$ On résoud le système pour trouver $x_1x_2 = 5$ et $x_3x_4 = -1$

4. Comme $x_1+x_2=2$ et $x_1x_2=5$ alors x_1 et x_2 sont racines du polynôme X^2-2X+5, d'où $x_1=1+2i$ et $x_2=1-2i$.
5. Comme $x_3+x_4=-2$ et $x_3x_4=-1$ alors x_3 et x_4 sont racines du polynôme X^2+2X-1, d'où $x_3=-1+\sqrt{2}$ et $x_4=-1-\sqrt{2}$.

Exercice 6. On pose $P=X^5-8X^3+3X^2+4X+12,\ Q=X^3-2X^2+X-2$ et $F=\dfrac{Q}{P}$.

1. Les racines rationnelles de $P=X^5-8X^3+3X^2+4X+12,$ sont de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux, $p>0$, p diviseur de 12 et q diviseur de 1. Les candidats sont donc $\pm1,\pm2,\pm3\pm4\pm6$. On vérifie que $P(2)=P'(2)=0$, 2 est donc racine de multiplicité 2 et que -3 est racine simple.
2. $P=(X+3)(X-2)^2(X^2+X+1)$ est la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$. Les racines de X^2+X+1 sont j et $\overline{j}=j^2$ où $j=e^{2i\pi/3}$.
3. On vérifie que 2 est racine simple de Q, puis que la division de Q par $X-2$ donne X^2+1 qui est irréductible dans $\mathbb{R}$. D'où $Q=(X-2)(X^2+1)$. Ainsi le PGCD unitaire de P et Q est $D=X-2$.
4. $F=\dfrac{Q}{P}=\dfrac{X^2+1}{(X+3)(X-2)(X^2+X+1)}$ est la forme réduite de F. Il n'y a pas de partie entière car le degré du numérateur de F est strictement plus petit que celui de son dénominateur. La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ aura donc la forme $F(X)=\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{X+3}+\dfrac{cX+d}{X^2+X+1}$, où a, b, c, d sont des réels à déterminer. En évaluant $(X-2)F=\frac{X^2+1}{(X+3)(X^2+X+1)}$ en $X=2$, on trouve $a=\frac{1}{7}$ et en évaluant $(X+3)F=\frac{X^2+1}{(X-2)(X^2+X+1)}$ en $X=-3$ en trouve $b=-\frac{2}{7}$. On calcule c et d en multipliant F par X^2+X+1 et en faisant $X=j$, ce qui donne $cj+d=\dfrac{j^2+1}{j^2+j-6}=\dfrac{j}{7}$ d'où $c=\frac{1}{7}$ et $d=0$.
   En récapitule, on a $F=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(X-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(X+3)}+\dfrac{1}{7}\dfrac{X}{X^2+X+1}$ est la décomposition de éléments simples sur $\mathbb{R}$.
   La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ sera de la forme
   $F(X)=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(X-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(X+3)}+\dfrac{\alpha}{X-j}+\dfrac{\overline{\alpha}}{X+\overline{j}}$, où α est un nombre complexe à déterminer.
   On peut le trouver en évaluant $\dfrac{X^2+1}{(X+3)(X-2)(2X+1)}$ en $X=j$, ce qui donne $\alpha=\dfrac{j^2+1}{(j^2+j-6)(2j+1)}=\dfrac{j}{7(2j+1)}=\dfrac{j}{7(j-j^2)}=\dfrac{1}{7(1-j)}$. On obtient ainsi $F=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(X-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(X+3)}+\dfrac{1}{7(1-j)}\dfrac{1}{(X-j)}+\dfrac{1}{7(1-j^2)}\dfrac{1}{(X-j^2)}$
5. Une primitive de $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^5-8x^3+3x^2+4x+12}=\dfrac{1}{7}\dfrac{1}{(x-2)}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{(x+3)}+\dfrac{1}{7}\dfrac{x}{x^2+x+1}$ est
   $$\frac{1}{7}\ln|x-2|-\frac{2}{7}\ln|x+3|+\frac{1}{14}\ln(x^2+x+1)-\frac{\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$