

**L1 - AR2 Arithmétique 2**

Contrôle continu - 5 Février 2014 - Durée : 1h  
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.  
Le barème est à titre indicatif.

**Exercice 1.** (6 points.)

- A) i) Trouver  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tels que  $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = 1$ ,  
 ii) Trouver  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tels que  $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = X^3$ ,  
 iii) Trouver  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tels que  $(a + bX)(X + 1) + c(X^2 + 1) = 1 + 2X + X^2$ .
- B) Je suis un polynôme à coefficients réels de degré 3 et  
 — je suis divisible par  $X^2 + 2$   
 — mon reste dans la division euclidienne par  $X - 2$  est 12  
 — mon reste dans la division euclidienne par  $X + 2$  est  $-4$ .  
 Qui suis-je ?

**Exercice 2.** (5 points.)

1. Calculer les racines du polynôme  $P(X) = 2X^2 - 2X + 2$ .
2. Le polynôme  $P$  divise-t-il  $(X^8 + 1)^8 - X^8$  ?
3. (a) Montrer que  $P(X)$  et  $Q(X) = 2X^2 - 5$  sont premiers entre eux.  
 (b) Trouver  $U$  et  $V$  tels que  $PU + QV = 1$ .

**Exercice 3.** (5 points.)

- i) Calculer le pgcd unitaire  $D$  des polynômes :

$$A = X^4 + X^2 - 2X \text{ et } B = X^3 - X^2 - 4$$

- ii) Trouver deux polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $D = UA + VB$ .  
 iii) Déterminer le ppcm unitaire de  $A$  et  $B$ .  
 iv) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de  $A$  et  $B$  sur  $\mathbb{R}$  puis sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 4.** (4 points.)

- A) Trouver un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(0) = 0$  et  $P(X + 1) = P(X) + 1$ .  
 Combien y a-t-il de polynômes vérifiant ces conditions ?
- B) Trouver un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $Q(0) = 0$  et  $Q(X^2 + 1) = Q(X)^2 + 1$ .  
 Combien y a-t-il de polynômes vérifiant ces conditions ?