Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2013-2014

L1 - AR2 Arithmétique 2

Corrigé du CC1-(05 /02/ 2014)

Exercice 1.

A) Trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

(a) $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=1$,
(b) $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=X^3$,
(c) $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=1+2X+X^2$.

Réponse :

i) On a $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=(b+c)X^2+(a+b)X+(a+c)$ et en identifiant les deux membres de l'égalité on obtient le système $\begin{cases} b+c=0 \\ a+b=0 \\ a+c=1 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2} \text{ et } c=\frac{1}{2}.}$

Autre méthode : En évaluant l'égalité en $X=-1$, on obtient $2c=1$ donc $c=\frac{1}{2}$. En évaluant l'égalité en $X=0$, on obtient $a+\frac{1}{2}=1$ d'où $a=\frac{1}{2}$. Finalement, en évaluant l'égalité en $X=1$, on obtient $2(\frac{1}{2}+b)+2.\frac{1}{2}=1$ i.e. $2b+2=1$ d'où $b=-\frac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2} \text{ et } c=\frac{1}{2}.}$

ii) Il n'existe pas de nombres a, b et c vérifiant l'égalité car $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)$ est de degré au plus 2 alors que X^3 est de degré 3.

iii) On a $(a+bX)(X+1)+c(X^2+1)=(b+c)X^2+(a+b)X+(a+c)$ et en identifiant les deux membres de l'égalité on obtient le système $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b=2 \\ a+c=1 \end{cases}$ on trouve alors $\boxed{a=1,\ b=1 \text{ et } c=0.}$

B) Je suis un polynôme à coefficient réels de degré 3 et

— je suis divisible par X^2+2
— mon reste dans la division euclidienne par $X-2$ est 12
— mon reste dans la division euclidienne par $X+2$ est -4.

Qui suis-je ?

Réponse : Comme le polynôme recherché P est de degré 3 et divisible par X^2+2, il s'écrit $P=(X^2+2)Q$ où Q est un polynôme de degré 1, donc $Q=aX+b$, i.e. $P=(X^2+2)(aX+b)$. On doit donc déterminer a et b. Le reste de la division de P par $X-2$ est $P(2)=12$, donc $6(2a+b)=12$, de même le reste le reste de la division de P par $X+2$ est $P(-2)=-4$, donc $6(-2a+b)=-4$. On obtient le système $\begin{cases} 12a+6b=12 \\ -12a+6b=-4 \end{cases}$ qui a pour solution $\boxed{a=\frac{2}{3} \text{ et } b=\frac{2}{3}.}$

D'où $P=(X^2+2)(\frac{2}{3}X+\frac{2}{3})=\frac{2}{3}X^3+\frac{2}{3}X^2+\frac{4}{3}X+\frac{4}{3}$.

Exercice 2.

i) Calculer le pgcd unitaire D des polynômes :

$$A=X^4+X^2-2X \text{ et } B=X^3-X^2-4$$

ii) Trouver U et V tels que $AU+BV=D$.

iii) Déterminer les décompositions en facteurs irréductibles de A et B sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.

iv) Déterminer le ppcm unitaire de A et B.

Réponse :

i) On a $A=(X+1)B+2X^2+2X+4$ et $B=(X^2+X+2)(X-2)$. Le pgcd unitaire de A et B est donc X^2+X+2.

ii) En remontant l'algorithme d'Euclide on obtient : $X^2+X+2=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}(X+1)B$, d'où les polynômes $U=\frac{1}{2}$ et $V=-\frac{1}{2}(X+1)$ conviennent.

iii) (a) Le polynôme X^2+X+2 est irréductible sur $\mathbb{R}$. Donc $B=(X^2+X+2)(X-2)$ est la décomposition en produits de facteurs irréductibles de B sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs $A=(X^2+X+2)(X^2-X)=(X^2+X+2)(X-1)X$ c'est la décomposition de A sur $\mathbb{R}$.

(b) Le polynôme X^2+X+2 a pour racines $-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. D'où
$B=(X+\frac{1+i\sqrt{7}}{2})(X+\frac{1-i\sqrt{7}}{2})(X-2)$ et $A=(X+\frac{1+i\sqrt{7}}{2})(X+\frac{1-i\sqrt{7}}{2})(X-1)X$
sont les décomposition en produits de facteurs irréductibles de B et A sur $\mathbb{C}$.

iv) Puisque A et B sont unitaires, on a $PPCM(A,B)=\frac{AB}{PGCD(A,B)}=\frac{((X^2+X+2)(X-1)X)((X^2+X+2)(X-2))}{X^2+X+2}=(X^2+X+2)(X-1)X(X-2)$.

Exercice 3.

1. Calculer les racines du polynôme $P(X)=2X^2-2X+2$.
2. Le polynôme P divise-t-il $(X^8+1)^8-X^8$?
3. (a) Montrer que $P(X)$ et $Q(X)=2X^2-5$ sont premiers entre eux.

   (b) Trouver U et V tels que $PU+QV=1$.

Réponse :

i) Les racines de $P(X)=2X^2-2X+2=2(X^2-X+1)$ sont $x_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=-j$ et $x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=-\bar{j}=-j^2$. D'où $P=(X+j)(X+j^2)$.

ii) Le polynôme P divise $(X^8+1)^8-X^8$ si et seulement si les racines de P sont des racines de $(X^8+1)^8-X^8$. Comme $(X^8+1)^8-X^8$ est à coefficients réels, si $-j$ est racine alors le conjugué $-\bar{j}$ sera aussi racine. On a donc juste à vérifier si $-j$ est racine de $(X^8+1)^8-X^8$.
$((-j)^8+1)^8-(-j)^8=(j^8+1)^8-j^8=(j^2+1)^8-j^2=(-j)^8-j^2=j^2-j^2=0$. Donc $-j$ est racine de $(X^8+1)^8-X^8$ et par suite P divise $(X^8+1)^8-X^8$.

(a) Comme $Q(-j)=2(-j)^2-5=2j^2-5\neq 0$, les racines de P ne sont pas des racines de Q, d'où P et Q sont premiers entre eux i.e. $PGCD(P,Q)=1$.

(b) On a $P=Q+(-2X+7)$ et $Q=(-2X+7)(-X-\frac{7}{2})$. En remontant l'algorithme d'Euclide on obtient : $1=(\frac{2}{39}X+\frac{7}{39})P-(\frac{2}{39}X+\frac{5}{39})Q$, d'où les polynômes $U=\frac{2}{39}X+\frac{7}{39}$ et $V=-\frac{2}{39}X-\frac{5}{39}$ conviennent.

Exercice 4.

1. Trouver un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0)=0$ et $P(X+1)=P(X)+1$.
   Combien y a-t-il de polynômes vérifiant ces conditions ?
2. Trouver un polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q(0)=0$ et $Q(X^2+1)=Q(X)^2+1$.
   Combien y a-t-il de polynômes vérifiant ces conditions ?

Réponse :

1. Le polynôme $P=X$ vérifie les conditions. Par ailleurs si P vérifie les conditions, on a $P(0)=0$, $P(1)=P(0)+1=0+1=1$, et ainsi de suite on obtient par récurrence que si $p(k-1)=k-1$ alors $p(k)=p(k-1)+1=k-1+1=k$.
   Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(k)-k=0$, ainsi le polynôme $P-X$ a une infinité de racines, il est alors le polynôme nul, d'où $P-X=0$. Donc X est l'unique polynôme vérifiant les conditions.
2. Le polynôme $Q=X$ vérifie les conditions. Par ailleurs si Q vérifie les conditions, on a $Q(0)=0$, $Q(1)=Q(0^2+1)=0^2+1=1$, $Q(2)=Q(1^2+1)=2$, et ainsi de suite : si (u_n) est la suite strictement croissante d'entiers naturels définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n^2+1$, alors on a par récurrence $Q(u_n)=u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $Q-X$ a une infinité de racines, on a $Q-X=0$. Donc X est l'unique polynôme vérifiant les conditions.