

L1 - AR2 Arithmétique 2

Contrôle continu - 4 Février 2013 - Durée : 1h
Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable ne sont permis.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (5 points.)

A) Trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

- i) $a(X+2)(X+3) + b(X+1)(X+3) + c(X+1)(X+2) = X$,
- ii) $a(X+5)(X+3) + b(X+1)(X+3) + c(X+1)(X+5) = X^4$.

B) Soit n un entier ≥ 1 . Soit P' le polynôme dérivé d'un polynôme P de degré n et à coefficients réels. Pour λ un réel fixé, on appelle Q_λ le polynôme $(2X - \lambda)P(X) + (1 - X^2)P'(X)$. Quel est le degré de Q_λ ?

Exercice 2. (5 points.)

A) Dans chacun des cas suivants, divisez le polynôme A par le polynôme B , trouvez le reste R et le quotient Q et vérifiez l'égalité $A = BQ + R$:

- 1) $A = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ et $B = X^2 + X - 1$.
- 2) $A = X^3 + 5X^2 - 3X + 1$ et $B = X^4 + X$.

B) Calculer le $PGCD$ des polynômes $P(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - X - 1$.

Exercice 3. (5 points.)

A) Considérons les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)^2(X+2)(X^2+1)^2 \\ Q(X) &= (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1)(X^2+X+1) \\ R(X) &= (X+3)^3(X+1)(X^2+1)^3 \end{aligned}$$

- 1) Ecrire le $PGCD$ et le $PPCM$ de P et Q .
- 2) Ecrire le $PGCD$ et le $PPCM$ des trois polynômes P, Q et R . (On généralise facilement les définitions et résultats donnés pour deux polynômes au cas de plusieurs polynômes).

B)

- 1. Montrer que $A(X) = X^3$ et $B(X) = X^2 + 3$ sont premiers entre eux.
- 2. Trouver tous les couples (U, V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 4. (5 points.)

A) Soient a et b deux réels tels que $a \neq b$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de la division de P par $(X - a)$ est 1 et celui de la division de P par $(X - b)$ est -1 . Quel est le reste de la division de P par $(X - a)(X - b)$?

B) Montrer que le polynôme $X^3 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.