Chapitre 4

Opérateurs compacts et théorie spectrale sur les espaces de Hilbert

4.1 Opérateurs compacts

Opérateurs compacts constituent une classe importante d'applications linéaires continues. D'une part, ils sont presque des opérateurs de rang fini (i.e. approchés par des opérateurs dont l'image est de dimension finie).

D'autre part, la classe des opérateurs compacts est suffisamment large pour inclure les opérateurs à noyau continus ou dans L^2.

4.1.1 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est un **opérateur compact** si $\overline{T(\bar{B}_E)}$ est un compact de F, où $\bar{B}_E$ est la boule unité fermée de E.

On note par $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F et par $K(E)$ si $E = F$.

4.1.2 Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathscr{L}(E,F)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) T est compact.

ii) Pour tout $A \subset E$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact.

iii) Toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Démonstration: 1. $i) \Rightarrow ii)$ Soit $A \subset E$ borné, alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset r.\bar{B}_E$ d'où $\overline{T(A)} \subset r\overline{T(\bar{B}_E)}$. Ainsi, $\overline{T(A)}$ est compact, comme fermé du compact $r.\overline{T(\bar{B}_E)}$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Il suffit de poser $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

iii) $\Rightarrow$ *i*) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{T\,(\bar{B}_E)}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in T\,(\bar{B}_E)$ tel que $\|y_n - z_n\|_F \leq 2^{-n}$.
Comme par hypothèse $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

4.1.1 Propriétés de base des opérateurs compacts

4.1.4 Proposition (Propriétés des opérateurs compacts)
Soit E et F deux espaces de Banach.

(i) L'ensemble des opérateurs compacts $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E,F)$.

(ii) Soient $S \in \mathscr{L}(E,F)$ et $T \in \mathscr{L}(F,G)$, alors si S ou T est compact, $T \circ S \in K(E,G)$.
En particulier, $K(E)$ est un *idéal bilatère de l'algèbre* $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration: i) Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $S, T \in K(E,F)$. Soit (x_n) une suite bornée de E. Comme S et T sont compacts, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $S(x_{\phi(n)})$ et $T(x_{\phi(n)})$ convergent, ainsi $\lambda S(x_{\phi(n)}) + \beta T(x_{\phi(n)})$ converge. Donc, la suite image de toute suite bornée par $\lambda S + \beta T$ admet une valeur d'adhérence i.e. $\lambda S + \beta T \in K(E,F)$.

Soit $T \in \overline{K(E,F)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon \in K(E,F)$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, cela signifie que $\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in \bar{B}_E$. Comme T_ε est compact, $T_\varepsilon\,(\bar{B}_E)$ est précompact, il exise donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon}\}$ tels que $T_\varepsilon\,(\bar{B}_E) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Ainsi, pour tout $x \in \bar{B}_E$, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$ tel que $\|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\|Tx - y_{i_0}\| \leq \|Tx - T_\varepsilon x\| + \|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
D'où $T\,(\bar{B}_X) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)$, par suite $\overline{T\,(\bar{B}_E)}$ est compact car F est complet. On a donc montrer que $T \in K(E,F)$. Ainsi $\overline{K(E,F)} = K(E,F)$.

ii) Supposons $S \in K(E,F)$. Comme $T(S\,(\bar{B}_E)) \subset T(\overline{S\,(\bar{B}_E)})$, ce dernier est compact, comme image du compact $\overline{S\,(\bar{B}_E)}$ par l'application continue T.
Ainsi $\overline{T \circ S\,(\bar{B}_E)}$ est compact i.e. $T \circ S \in K(E,F)$. ∎

4.1.6 Corollaire (Les isomorphismes ne sont pas compacts)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité de E n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \to E$ n'est pas compact.

Démonstration: Pour l'opérateur identité I sur E, on a $\overline{I\left(\bar{B}_E\right)} = \bar{B}_E$, qui ne peut être compacte car la dimension de E est infinie. Quant à l'assertion générale, si un isomorphisme $T : E \to E$ est compact alors l'opérateur identité $I = T^{-1} \circ T$ serait compact, d'après la proposition précédente, ce qui serait une contradiction. ∎

4.1.8 DÉFINITION
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in \mathscr{L}(E, F)$ est dite **de rang fini** si la dimension de l'image de L est finie i.e. $\dim L(E) < +\infty$. On note $R(E, F)$ l'espace des opérateurs de rang fini.

4.1.9 REMARQUE
Tout opérateur de rang fini est compact. En effet, $\overline{T\left(\bar{B}_E\right)}$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $L(E)$, est donc compact.

Comme $K(E, F)$ est fermé, il s'ensuit que tout opérateur qui peut être approché par des opérateurs de rang fini est également compact; c'est un critère très utile pour montrer qu'un opérateur est compact.

4.1.10 COROLLAIRE (OPÉRATEURS DE RANG PRESQUE FINI SONT COMPACTS)
Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$, tel qu'il existe $T_n \in R(E, F)$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|T_n - T\| = 0$. Alors T est compact.

4.1.11 REMARQUE
On a la réciproque, pour un espace de Hilbert, tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

4.1.2 Exemples d'opérateurs compacts

4.1.12 EXEMPLE. Soit une matrice infinie

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (a_{n,m}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2},$$

tel que $C = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}|^2 < +\infty$.

Alors, A définit un oprérateur compact $T : \ell^2 \to \ell^2$ par

$$T((x_n)) = (\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{0j}x_j, \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{1j}x_j, \dots) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}x_j\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

En effet, T est bien défini,

$$\|T(x_n)\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}x_j\right|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|.|x_j|\right)^2$$

et par Cauchy-Schwarz on aura

$$\|T(x_n)\|_2^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2\right) . \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2\right) = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}|^2\right) .\|(x_n)\|_2^2$$

D'où $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ et $\|T\| \leq \sqrt{C}$.

Soit $T_k : \ell^2 \to \ell$, défini par $T_k((x_n)) = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}^*} a_{ij}x_j\right)_{0\leq i\leq k}$, c'est un opérateur de rang fini, en effet, c'est l'application $P_k \circ T$ où P_k est la projection orthogonale sur $F_k = \text{Vect}(e_i)_{0\leq i\leq k}$ où les e_n sont les élements de la base hilbertienne standard de ℓ^2. On voit facilement que $\|T - T_k\|^2 \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2\right)$ donc tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$, comme le reste d'une série convergente. D'où T est limite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact.

4.1.13 Exemple (Les opérateurs intégraux sont compacts). Soit $E = L^2(I, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_2$, où I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Considérons l'opérateur intégral $T : E \to E$ défini par

$$(Tf)(t) = \int_I K(t,s)f(s)\, ds$$

où le noyau "noyau" $K \in C(I \times I, \mathbb{C})$. D 'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on

$$|\int_I K(t,\ s)f(s)ds| \leq \|K(t,\ \cdot)\|_2\|f\|_2$$

et

$$\|Tf\|_2^2 = \int_I |(Tf)(s)|^2 ds$$

$$= \int_I |\int_I K(t,\ s)f(y)ds|^2 dt \leq \|f\|_2^2 \int_I \|K(t,\ \cdot)\|_2^2 dt = \|f\|_2^2 \|K\|_2^2.$$

Ceci montre que lorsque $f \in L^2(I)$, la fonction $T_K f$ est bien définie presque partout et qu'elle est de carré intégrable. T_K est clairement une opérateur linéaire, et le calcul ci-dessus montre qu'il est borné et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.

Pour montrer que T est un opérateur compact, nous devons montrer que $A := T(B_E)$ est un sous-ensemble relativement compact dans E.

1) Soit $f \in B_E$, alors pour tout $t \in I$,

$$|Tf(t)| = \left| \int_I k(t,s)f(s)\,ds \right| \leq \|f\|_2 \sup_{t\in I} \|K(t,\ \cdot)\|_2 \leq \sup_{t\in I} \|K(t,\ \cdot)\|_2 = C.$$

D'où $A(t) = \{Tf(t)\ :\ f \in B_E\}$ est donc borné.

2) Équicontinuité : Comme K est continue sur le compact $I \times I$, elle est équicontinue, d'où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| \leq \delta \quad \text{entraîne} \quad |K(t_1, s_1) - K(t_2, s_2)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $f \in B_E$, par l'inégalité triangulaire on a

$$\left|(Tf)(t_1) - (Tf)(t_2)\right| \leq \int_I |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|f(s)|\,ds \leq \varepsilon \int_I |f(s)|\,ds \leq \varepsilon\|f\|_2 \leq \varepsilon$$

car $\|f\|_2 \leq 1$. Cela montre que l'ensemble A est équicontinu.
D'après le théorème d'Arzela-Ascoli 1.4.22, $A = T(B_E)$ est relativement compact dans E.

4.1.14 Exercice Soit une suite de nombres réels $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ on pose $Tx := (\lambda_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Sous quelles conditions, sur la suite (λ_k), l'opérateur T est bien défini ? continu ? compact ?

Exemple : les opérateurs de Hilbert-Schmidt

Il s'agit de la classe la plus fréquente d'opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert.

4.1.15 Définition

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* s'il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty$.

Le réel $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2\right)^{1/2}$ est appelé la *norme de Hilbert-Schmidt* de T.

4.1.16 EXEMPLE. Pour une application linéaire en dimension finie $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, (de façon équivalente, pour les matrices $n \times n$), la norme de Hilbert-Schmidt est la norme $\|T\| = \sqrt{\operatorname{tr}(T^*T)}$.

4.1.17 PROPOSITION
La définition d'opérateur et de norme de Hilbert-Schmidt ne dépendent pas du choix de la base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

Démonstration: Supposons que $\sum_k \|Te_k\|^2 < \infty$ pour une base hilbertienne (e_k) de $\mathscr{H}$. En utilisant l'identité de Parseval deux fois, on obtient

$$\sum_k \|Te_k\|^2 = \sum_k \sum_j |\langle Te_k, e_j\rangle|^2 = \sum_j \sum_k |\langle e_k, T^*e_j\rangle|^2 = \sum_j \|T^*e_j\|^2.$$

Soit (e'_k) une autre base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Le même argument donne

$$\sum_j \|T^*e_j\|^2 = \sum_j \sum_k |\langle e'_k, T^*e_j\rangle|^2 = \sum_k \sum_j |\langle Te'_k, e_j\rangle|^2 = \sum_k \|Te'_k\|^2.$$

D'où $\sum_k \|Te_k\|^2 = \sum_k \|Te'_k\|^2$. ■

4.1.19 REMARQUE

1. Une conséquence (de la démonstration) de ce qui précède, est que $\|T^*\|_{\text{HS}} = \|T\|_{\text{HS}}$.
2. D'autre part on a toujours $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$.
   En effet, soit x un vecteur de norme 1 et $B = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ telle que $x \in B$. Alors $\|Tx\| \leq \sum_k \|Tx_k\|^2 = \|T\|_{\text{HS}}$. En appliquant cette inégalité à tous les x tel que $\|x\| = 1$, on obtient le résultat.

4.1.20 PROPOSITION
Tout opérateur T de Hilbert-Schmidt est compact.

Démonstration: Soit une base hilbertienne (e_k) de $\mathscr{H}$. on pose $c = \sum_k \|Te_k\|^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k>N_\varepsilon} \|Te_k\|^2 \leq \varepsilon^2$. On pose $F_\varepsilon = \operatorname{Vect}\{e_0, \ldots, e_{N_\varepsilon}\}$ et $P_\varepsilon : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ la projection orthogonale sur F_ε. Alors $T_\varepsilon = P_\varepsilon \circ T$ est de rang fini et $\|T - T_\varepsilon\|^2 \leq \|T - T_\varepsilon\|^2_{\text{HS}} = \sum_{k>N_\varepsilon} \|Te_k\|^2 \leq \varepsilon^2$. Ainsi T est limite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact.

4.1.22 EXEMPLE (OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE HILBERT-SCHMIDT). Considérons l'opérateur intégral $T : L^2([0,1],\mathbb{K}) \to L^2([0,1],\mathbb{K})$ défini par

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds$$

avec un noyau $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|k\|_2$.

Démonstration: On peut voir T, comme le produit scalaire de f avec le noyau k. En effet si on note, $k_t(s) = k(t,s)$, Alors $(Tf)(t) = \langle k_t, f\rangle,$ pour tout $t \in [0,1]$.
Fixons une base orthonormée (x_k) de $L^2([0,1],\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_k \|Tx_k\|_2^2 = \sum_k \int_0^1 |(Tx_k)(t)|^2\,dt &= \sum_k \int_0^1 |\langle k_t, x_k\rangle|^2\,dt \\
&= \int_0^1 \sum_k |\langle k_t, x_k\rangle|^2\,dt \quad \text{(par le théorème de convergence monotone)} \\
&= \int_0^1 \|k_t\|_2^2\,dt \quad \text{(par l'identité de Parseval)} \\
&= \|k\|_2^2 \quad \text{(par définition de } k_t \text{ et le théorème de Fubini).}
\end{aligned}$$

■

4.2 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts

Rappelons que si A est une matrice carrée $n \times n$, un nombre complexe λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$ et tel que $Ax = \lambda x$, ce qui signifie que $(A - \lambda I)x = 0$, c'est-à-dire $A - \lambda I$ n'est pas inversible, où I est la matrice identité sur $\mathbb{R}^n$. Comme les valeurs propres ont de nombreuses applications en dimension finie, Dans cette partie on va étendre ces notion au espaces de Hilbert.

4.2.1 Le spectre d'un opérateur

4.2.1 DÉFINITION
Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et T un endomorphisme de E. On appelle

- Spectre de T est l'ensemble $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda I \text{ ne soit pas inversible}\}$
- Spectre ponctuel de T est l'ensemble $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$ i.e. l'ensemble des valeurs propres de T. On appelle multiplicité de la valeur propre λ, la dimension du sous-espace propre $\ker(T - \lambda I)$.

4.2.2 REMARQUE

a) On a toujours $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

b) Soit $\mathscr{V}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie et T une application linéairesur $\mathscr{V}$. Alors $(T - \lambda I)$ est inversible précisément lorsque λ n'est pas une valeur propre de T. Il en résulte que le spectre $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

4.2.3 EXEMPLE. Les exemples suivant montrent que pour une application linéaire sur un espace de dimension infinie, le spectre peut être très complexe.

4.2.4 EXEMPLE (OPÉRATEUR DIAGONAL SUR $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$). Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. On définit l'opérateur T sur ℓ^2 par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $(T - \lambda I)x = ((\lambda_k - \lambda)x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors$(T - \lambda I)^{-1}y = (\dfrac{y_k}{\lambda_k - \lambda})_{k\in\mathbb{N}}$. Il en résulte que $(T - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné si et seulement si λ n'est pas dans l'adhérence de $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, qui n'est autre que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$.

Comme $Te_k = \lambda_k e_k$, pour e_k élément de la base canonique de ℓ^2, on en déduit que tous les λ_k sont des valeurs propres de T. Mais 0 n'est pas valeur propre car T est injective (puisque tous les $\lambda_k \neq 0$).
D'où : $\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ et $\sigma_p(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

4.2.5 EXEMPLE (OPÉRATEUR DE MULTIPLICATION SUR $L^2[0,1]$). Considérons l'opérateur de multiplication $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ définie par $(Tf)(t) = tf(t)$. Comme $(T - \lambda I)f(t) = (t - \lambda)f(t)$, nous aurons $(T - \lambda I)^{-1}y(t) = \dfrac{1}{t-\lambda}y(t)$. Si $\lambda \notin [0,1]$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$ est bornée, d'où $(T - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné. Inversement, si $\lambda \in [0,1]$, alors $\frac{1}{t-\lambda} \notin L^2[0,1]$ en raison de la singularité non-intégrable en $t = \lambda$. D'où $T - \lambda I$ n'est pas inversible (prendre par exemple $y(t) \equiv 1$). Par conséquent, $\sigma(T) = [0,1]$.

Supposons que λ soit une valeur propre de T avec f un vecteur propre dans $L^2[0,1]$. Cela signifie que l'identité suivante est vérifiée

$$(t - \lambda)f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Il en résulte que $f = 0$ dans $L^2[0,1]$. Par conséquent, T *n'a pas de valeurs propres*.
D'où : $\sigma(T) = [0,1]$ et $\sigma_p(T) = \emptyset$.

4.2.6 EXEMPLE (OPÉRATEUR DE DÉCALAGE). Considérons les opérateurs de décalage à droite R et à gauche L sur ℓ^2, agissent sur un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots)$ par

$$R(x) = (0, x_1, x_2, \ldots), \quad L(x) = (x_2, x_3, \ldots,).$$

R est clairement injectif mais pas surjectif comme L est surjectif mais pas injectif.n

4.2.7 Exercice Montrer que

$$\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\},\ \sigma_p(R) = \emptyset,$$
$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\},\ \sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}.$$

4.2.2 Opérateurs auto-adjoints

Soit T est un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert, soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Rappelons 3.3.1, que l'opérateur adjoint $T^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est définie par $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pour $x, y \in \mathscr{H}$.

4.2.8 DÉFINITION
Un opérateur $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est dit **auto-adjoint** si $T^* = T$, i.e.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad x, y \in \mathscr{H}.$$

4.2.9 EXEMPLE. (i) L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.

(ii) les opérateurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$ donné par des matrices hermitiennes (a_{ij}), c'est à dire telles que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$;

(iii) Un opérateur intégral $(Tf)(t) = \int_0^1 k(s,t) f(s)\, ds$ sur $L^2([0,1], \mathbb{C})$ avec un noyau hermitien, c'est à dire tel que $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$;

(iv) Les projections orthogonales sur des sous-espaces fermés de $\mathscr{H}$. (Pourquoi ?)

4.2.10 REMARQUE
Tout opérateur $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ peut être représenté de manière unique comme

$$A = T + iS$$

où $T, S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ sont opérateurs auto-adjoints.

En effet, si on écrit $A = T + iS$, alors $A^* = T - iS$, d'où $T = \frac{A+A^*}{2}$ et $S = \frac{A-A^*}{2i}$.

4.2.11 Exercice Montrer que l'ensemble des opérateurs auto-adjoints forme un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

4.2.12 DÉFINITION (SOUS-ESPACE INVARIANT)
Un sous-espace E de $\mathscr{H}$ est *invariant* par T si $T(E) \subseteq E$.

4.2.13 EXEMPLE. Chaque sous-espace propre de T est invariant. Plus généralement, l'espace engendré par n'importe quel sous-ensemble de vecteurs propres de T est un sous-espace invariant.

4.2.14 PROPOSITION
Soit $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et auto-adjoint. Si $E \subseteq \mathscr{H}$ est un sous-espace invariant par T alors $E^{\perp}$ est aussi un sous-espace invariant par T.

Démonstration: Soit $x \in E^{\perp}$. Alors pour tout $y \in E$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$, d'où $Tx \in E^{\perp}$. ■

4.2.16 REMARQUE
Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint, Alors pour tout $x \in \mathscr{H}$, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. En effet, $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$.

4.2.17 PROPOSITION
Soit $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors toutes les valeurs propres de T sont réelles (c.-à-d $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$) et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

Démonstration: Soit λ une valeur propre de T et x un vecteur propre associé. Alors $\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle$, donc, remarque 4.2.16, on a $\lambda = \dfrac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \dfrac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$. Si μ est une autre valeur propre de T et y un vecteur propre associé, alors

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\mu}\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Il en résulte que $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, on aura $\langle x, y\rangle = 0$ ■

4.2.19 PROPOSITION
Soit $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert et T un opérateur compact auto-adjoint de $\mathscr{H}$.
Alors il existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ telle que $|\lambda| = \|T\|$.
D'où $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T.

Démonstration: On pose $\alpha = \|T\|$. On suppose que $\alpha \neq 0$, sinon $T = 0$.
Alors $\alpha^2 = \|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, Tx\rangle = \sup_{\|x\|=1}\langle T^2x, x\rangle$. Soit $(x_n) \in \mathscr{H}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle T^2x_n, x_n\rangle = \alpha^2$.

$$\begin{aligned}
\|(T^2 - \alpha^2 I)x_n\|^2 &= \|T^2x_n - \alpha^2 x_n\|^2 \\
&= \|Tx\|^4 + \alpha^4\|x\|^2 - 2\alpha^2\left\langle T^2x_n, x_n\right\rangle \\
&\leq \alpha^4 + \alpha^4 - 2\alpha^2\left\langle T^2x_n, x_n\right\rangle
\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\|(T^2 - \alpha^2 I)x_n\| = 0$.

Comme T est compact, il existe une sous-suite, $(T^2 x_{\phi(n)})$ qui converge vers un $y \in \mathscr{H}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha^2 x_{\phi(n)} = y \neq 0$. On pose $u = \frac{y}{\alpha^2}$. Le passage à la limite de $T^2(u) = \alpha^2 u$ i.e.

$$0 = (T^2 - \alpha^2 I) = (T + \alpha I)(T - \alpha I)u.$$

Alors, si $(T - \alpha I)u$, alors $\|T\|$ est valeur propre de T, sinon $v = (T - \alpha I)u \neq 0$ et $(T + \alpha I)v = 0$, donc $-\|T\|$ est valeur propre de T. ∎

4.2.21 REMARQUE

L'ensemble des valeurs propres $\sigma_p(T)$ est contenu dans $[-\|T\|, \|T\|]$. Donc $\|T\|$ est la plus grande valeur propre, en module.

En effet, soit λ une valeur propre et x un vecteur propre associé de norme 1 alors $|\lambda| = |\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|\|x\|^2 = \|T\|$.

Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Un résultat d'algèbre linéaire dit que pour une matrice A hermitienne i.e. $A^* = A$ (respectivement normale i.e. $AA^* = A^*A$) il existe une base orthonormée dans laquelle elle est diagonale réelle (respectivement diagonale complexe). Dans ce qui suit nous allons montrer un résultat analogue pour les opérateurs compact auto-adjoints (respectivement normaux) dans un espace de Hilbert.

4.2.22 THÉORÈME

Soien $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, *réel ou complexe*, et $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de l'opérateur T.

Pour tout $\epsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs de cette base pour lesquels la valeur propre sont de valeur absolue $\geq \epsilon$.

Démonstration: On supposera $\dim \mathscr{H} = +\infty$, sinon le résultat est déjà connu.

On construit par récurrence une suite croissante (E_n) de sous-espaces de dimension finie, engendreée par des vecteurs propre de T. On amorce l'induction, en appliquant la proposition 4.2.19, qui assure l'existence d'un vecteur e_1 de norme 1, tel que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$ avec $|\lambda| = \|T\|$.

On suppose que $\mathrm{E}_n = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ est donné, engendré par des vecteurs propres de T, on raisonne ainsi : on a $\mathrm{E}_n \neq \mathscr{H}$ puisque $\dim \mathscr{H} = +\infty$, donc $\mathrm{E}_n^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. La restriction $\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_{|\mathrm{E}_n^\perp} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_n^\perp)$ est un opérateur auto-adjoint et compacte, donc il admet une valeur propre réelle λ_{n+1} telle que $|\lambda_{n+1}| = \|\mathrm{T}_{n+1}\|$, et il existe un vecteur $e_{n+1} \in \mathrm{E}_n^\perp$, qu'on peut choisir de norme 1, tel que $\mathrm{T}e_{n+1} = \mathrm{T}_{n+1}e_{n+1} = \lambda_{n+1}e_{n+1}$. On pose alors $\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$.

Cette construction par récurrence produit une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ de *vecteurs* propres de l'opérateur T ; de plus ces vecteurs sont de norme 1, deux à deux orthogonaux puisque, pour tout $n \geq 1$, e_{n+1} est orthogonal à $e_1, \ldots, e_n$ par construction.

On a $\mathrm{T}e_n = \lambda_n e_n$ avec $|\lambda_n| = \|\mathrm{T}_n\|$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(\|\mathrm{T}_n\|)$ est décroissante (car la suite $(\mathrm{E}_n^\perp)$ est décroissante), donc converge vers un nombre $\alpha \geq 0$. Par la compacité on doit avoir $\alpha = 0$, c'est-à-dire que $\|\mathrm{T}_n\| \to 0$, sinon la suite $(\mathrm{T}e_n)$ du compact $\mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathscr{H}})$ ne pourrait avoir aucune sous-suite convergente, puisque pour tous $m \neq n$ on a

$$\|\mathrm{T}e_m - \mathrm{T}e_n\|^2 = |\lambda_m|^2 + |\lambda_n|^2 \geq 2\alpha^2.$$

L' espace fermé $\mathrm{E} = \overline{\bigcup_{n\geq 1} E_n}$ engendré par cette suite de vecteurs propres (e_n) est stable par T, ainsi que son orthogonal $\mathrm{E}^\perp$; on voit que la restriction T_0 de T à $\mathrm{E}^\perp$ est nulle, car $\|\mathrm{T}_0\| \leq \|\mathrm{T}_n\|$ pour tout n. On a diagonalisé T : il suffit de compléter la suite orthonormée (e_n) par une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de $\mathrm{E}^\perp$, où l'ensemble I peut être vide, dans le cas où $\mathrm{E}^\perp = \{0\}$; on aura $\mathrm{T}e_i = 0$ pour tout $i \in I$.
Soit $(e_j)_{j\in\mathrm{J}}$ une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T, $\mathrm{T}e_j = \lambda_j h_j$. Soit $\epsilon > 0$ et $\mathrm{J}_\epsilon = \{j \in \mathrm{j} : |\lambda_j| \geq \epsilon\}$. Alors $\|\mathrm{T}e_i - \mathrm{T}e_j\|^2 \geq 2\epsilon^2$ pour tout couple $(i, j) \in J_\varepsilon$, ne pourrait avoir aucune sous-suite convergente, par compacité de T, ceci implique que l'ensemble J_ϵ est fini.

Maintenant, nous pouvons énoncer ce qu'on appelle le théorème spectrale pour opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert séparable.

4.2.24 THÉORÈME (THÉORÈME SPECTRAL)

Soient $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur compact auto-adjoint.
Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite de réells $(\lambda_n)_n$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \lambda_n e_n$ et pour tout $x \in \mathscr{H}$

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

Démonstration: D'après le théorème 4.2.22, il existe une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ formée de vecteurs propres de T. Cette base est dénombrable car $\mathscr{H}$ est séparable. On la note $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$ et $m > k \geq 0$, on a

$$\left\|\sum_{n=k}^{m} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n\right\|^2 = \sum_{n=k}^{m} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|T\| \sum_{n=k}^{m} |\langle x, e_n\rangle|^2 \to 0 \quad \text{lorsque } k, m \to +\infty.$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$ est convergente dans $\mathscr{H}$.
De plus, pour tout $x \in \mathscr{H}$, on a pour tout $m \geq 0$, nous avons

$$\left\| \sum_{n=0}^{m} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 \leq \|T\| \sum_{n=0}^{m} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|T\|^2\|x\|^2. \tag{4.2.1}$$

Par conséquent, si nous définissons $Lx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$, à partir de (4.2.1), nous constatons que $L \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $L(e_n) = T(e_n)$. Ainsi, par linéarité et continuité, on aura $T = L$. ■

Diagonalisation d'opérateur compact normal complexe.

4.2.26 PROPOSITION
Soient $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert séparable et $T, S \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ deux opérateurs compacts auto-adjoints tels que $TS = ST$. Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ formée de vecteurs propres de T et S.

Démonstration: pour toute valeur propre λ de T, on note $N_\lambda = \ker(T - \lambda I)$, son espace propre. Alors pour tout $x \in N_\lambda$ on a $TSx = STx = \lambda x$. D'où $Sx \in N_\lambda$ Ainsi la restriction de S à N_λ est opérateur auto-adjoint compact, donc il existe une base hilbertienne de N_λ formée de vecteurs propres de S. En prenant la réunion sur tous les sous-espaces propres on obtient le résultat. ■

4.2.28 DÉFINITION
On dit que T $\in \mathscr{L}$(H) est un opérateur *normal* si T commute avec son adjoint, T*T = TT*

4.2.29 REMARQUE
Si T est *normal* on a $\ker T^* = \ker T$. En effet, on a pour tout $x \in H$

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx,\ x\rangle = \langle TT^*x,\ x\rangle = \|T^*x\|^2$$

Si $Tx = \lambda x$, on a $T^*x = \overline{\lambda}x$. En effet, en appliquant ce qui précède à l'opérateur *normal* $S = T - \lambda\,\mathrm{Id}$, et en notant que l'adjoint de $\lambda\,\mathrm{Id}$ est $\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}$,

$$\|Tx - \lambda x\|^2 = \|T^*x - \overline{\lambda}x\|^2$$

4.2.30 COROLLAIRE (THÉORÈME SPECTRALE POUR LES OPÉRATEURS COMPACTS NORMAUX)
Soient $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe séparable, de dimension infinie et $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ un opérateur compact normal i.e. $TT^* = T^*T$.
Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ et une suite de nombres complexes $(\lambda_n)_n$, telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = \lambda_n e_n$ et pour tout $x \in \mathscr{H}$

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

Démonstration: On décompose T en deux opérateurs $T = A + iB$ avec $A = \dfrac{T+T^*}{2}$ et $B = \dfrac{T-T^*}{2i}$. Alors A et B sont auto-adjoints et comme T est normal ils commutent i.e. $AB = BA$. Ainsi, d'après le théorème spectrale 4.2.24 et la proposition 4.2.26, il existe une base orthonormée (e_n) des suites de réelles (α_n) et (β_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Ae_n = \alpha_n e_n$ et $Be_n = \beta_n e_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = (\alpha_n + i\beta_n)e_n$, d'où e_n est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$ il s'en suit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. ∎