

Chapitre 5

Opérateurs compacts et théorie spectrale sur les espaces de Hilbert

5.1 Opérateurs compacts

Opérateurs compacts constituent une classe importante d'opérateurs linéaires bornés. D'une part, ils sont presque des opérateurs de rang fini (i.e. d'image de dimension finie).

D'autre part, la classe des opérateurs compacts est suffisamment large pour inclure les opérateurs à noyau continu où dans L^2 .

5.1.1 DÉFINITION

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite **compacte** (ou un opérateur compact) si : $\overline{T(\bar{B}_E)}$ est un compact de F , où \bar{B}_E est la boule unité fermée de E .

Notation : On note par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F .

Dans le cas $E = F$ on note simplement cet espace par $K(E)$.

5.1.2 PROPOSITION

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) T est compact.
- ii) Pour tout $A \subset E$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact.
- iii) Toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Démonstration: 1. *i) \Rightarrow ii)* Soit $A \subset E$ borné, alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset r \cdot \bar{B}_E$ d'où $\overline{T(A)} \subset rT(\bar{B}_E)$. Ainsi, $\overline{T(A)}$ est compact, comme fermé du compact $r \cdot \overline{T(\bar{B}_E)}$.
ii) \Rightarrow iii) Il suffit de poser $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
iii) \Rightarrow i) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\overline{T(\bar{B}_E)}$.
 pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $z_n \in T(\bar{B}_E)$ tel que $\|y_n - z_n\|_F \leq 2^{-n}$.
 Comme par hypothèse $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, il en est de même pour $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

5.1.1 Propriétés de base des opérateurs compacts

5.1.4 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS COMPACTS)

Soit X et Y deux espaces de Banach.

- (i) L'ensemble des opérateurs compacts $K(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$.
- (ii) Soient $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, alors si S ou T est compact, $T \circ S \in K(X, Z)$.
 En particulier, $K(X)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(X)$.

Démonstration: i) Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ et $S, T \in K(X, Y)$. Soit (x_n) une suite bornée de X . Comme S et T sont compacts, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $S(x_{\phi(n)})$ et $T(x_{\phi(n)})$ convergent, ainsi $\lambda S(x_{\phi(n)}) + \beta T(x_{\phi(n)})$ converge. Donc, toute suite bornée, son image par $\lambda S + \beta T$ admet une valeur d'adhérence i.e. $\lambda S + \beta T \in K(X, Y)$.

Fermeture : Soit $T \in \overline{K(X, Y)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon \in K(X, Y)$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, cela signifie que

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } x \in \bar{B}_X.$$

Comme T_ε est compact, $T_\varepsilon(\bar{B}_X)$ est précompact, il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}\}$ tels que

$$T_\varepsilon(\bar{B}_X) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Ainsi, pour tout $x \in \bar{B}_X$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $\|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\|Tx - y_{i_0}\| \leq \|Tx - T_\varepsilon x\| + \|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ D'où } T(\bar{B}_X) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon),$$

par suite $\overline{T(\bar{B}_X)}$ est compact car Y est complet. On a donc montré que $T \in K(X, Y)$.
 Finalement $\overline{K(X, Y)} = K(X, Y)$.

ii) Supposons $S \in K(X, Y)$. Comme $T(S(\bar{B}_X)) \subset T(\overline{S(\bar{B}_X)})$, ce dernier est compact, comme image du compact $\overline{S(\bar{B}_X)}$ par l'application continue T .
Ainsi $\overline{T \circ S(\bar{B}_X)}$ est compact i.e. $T \circ S \in K(X, Y)$. ■

5.1.6 COROLLAIRE (LES ISOMORPHISMES NE SONT PAS COMPACTS)

Soit X un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité de X n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T : X \rightarrow X$ n'est pas compact.

Démonstration: Pour l'opérateur identité I sur X , on a $\overline{I(\bar{B}_X)} = \bar{B}_X$, qui ne peut être compacte car la dimension de X est infinie. Quant à l'assumption générale, si un isomorphisme $T : X \rightarrow X$ est compact alors l'opérateur identité $I = T^{-1} \circ T$ serait compact, ce qui serait une contradiction. ■

5.1.8 DÉFINITION

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dite **de rang fini** si la dimension de l'image de L est finie i.e. $\dim L(X) < +\infty$.

5.1.9 REMARQUE

Tout opérateur de rang fini est compact. En effet, $\overline{T(\bar{B}_X)}$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $L(E)$, est donc compact.

Comme $K(X, Y)$ est fermé, il s'ensuit que tout opérateur qui peut être approché par des opérateurs de rang fini est également compact :

5.1.10 COROLLAIRE (OPÉRATEURS DE RANG PRESQUE FINI SONT COMPACTS)

Soit X et Y deux espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, tel qu'il existe $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, T_n de rang fini, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$. Alors T est compact.

On a la réciproque, tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, pour les espaces de Hilbert.

5.1.11 PROPOSITION

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Alors :

$T \in K(H_1, H_2)$ si et seulement s'il existe une suite $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, T_n de rang fini, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$.

Démonstration: Soit $T \in K(H_1, H_2)$ et $\varepsilon > 0$. Comme T est compact, $T(\bar{B}_X)$ est précompact, il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}\}$ tels que

$$T(\bar{B}_X) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon). \quad (5.1.1)$$

On pose $F_\varepsilon = \text{Vect}\{y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}\}$, et $P_\varepsilon : H_2 \rightarrow H_2$ la projection orthogonale sur F_ε . Soit $T_\varepsilon = P_\varepsilon \circ T$. Comme $T_\varepsilon(H_1) = P_\varepsilon \circ T(H_1) \subset F_\varepsilon$, T_ε est de rang fini. D'autre part, d'après 5.1.1, pour tout $x \in \bar{B}_X$,

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| = \|Tx - P_\varepsilon(Tx)\| = \inf_{y \in F_\varepsilon} \|Tx - y\| \leq \varepsilon.$$

D'où $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. ■

5.1.2 Exemples

L'exemple suivant est l'une des principale motivation pour étudier les opérateurs compacts.

5.1.13 PROPOSITION (LES OPÉRATEURS INTÉGRAUX SONT COMPACTS)

Soit $C[0, 1]$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Considérons l'opérateur intégral $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ défini par

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s) ds$$

avec un "noyau" $k \in C([0, 1] \times [0, 1])$. Alors T est un opérateur compact.

Démonstration: Nous devons montrer que $K := T(B_{C[0,1]})$ est un sous-ensemble précompact de $C[0, 1]$. D'après le théorème d'Ascoli -Arzelà 5.3.10, cela découle de la bornitude et l'équicontinuité de l'ensemble K .

La bornitude : Soit $f \in B_{C[0,1]}$, alors $\|f\|_\infty \leq 1$, d'où

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t, s)f(s) ds \right|^2 dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t, s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t, s)f(s) ds \right|^2 dt = C.$$

D'où $K \subset \bar{B}(0, \sqrt{C})$ est donc borné.

Équicontinuité : Comme k est continue sur le compact $[0, 1] \times [0, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$ et on choisit $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \quad \text{entraîne} \quad |k(t_1, s) - k(t_2, s)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } s \in [0, 1].$$

Maintenant, pour chaque $f \in B_{C[0,1]}$, on obtient par l'inégalité triangulaire que

$$|(Tf)(t_1) - (Tf)(t_2)| \leq \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| |f(s)| ds \leq \varepsilon$$

car $|f(s)| \leq 1$ pour tous s . Cela montre que l'ensemble K est équicontinu. Ainsi K est précompact. ■

5.1.15 Exercice Soit une suite de nombres réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$, et pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ on pose $Tx := (\lambda_k x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Sous quelles conditions sur la suite (λ_k) l'opérateur T est bien défini ? continu ? compact ?

Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Il s'agit de la classe la plus utilisée d'opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert.

5.1.16 DÉFINITION

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, et soit (x_k) une base hilbertienne de \mathcal{H} . Un opérateur linéaire $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|^2 < \infty.$$

Le réel

$$\|T\|_{\text{HS}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|^2 \right)^{1/2}$$

est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de T .

5.1.17 EXEMPLE. Pour les opérateurs des espaces de dimension finie $T : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, (de façon équivalente, pour les matrices $n \times m$), la norme de Hilbert-Schmidt est la norme $\|T\| = \sqrt{\text{tr}(T^*T)}$.

5.1.18 PROPOSITION

La définition de l'opérateur de Hilbert-Schmidt et de la norme de Hilbert-Schmidt ne dépendent pas du choix d'une base hilbertienne de \mathcal{H} .

Démonstration: Supposons que $\sum_k \|Tx_k\|^2 < \infty$ pour une base hilbertienne (x_k) de \mathcal{H} . En utilisant l'identité de Parseval deux fois, on obtient

$$\sum_k \|Tx_k\|^2 = \sum_{k,j} |\langle Tx_k, x_j \rangle|^2 = \sum_{k,j} |\langle x_k, T^* x_j \rangle|^2 = \sum_k \|T^* x_j\|^2. \quad (5.1.2)$$

Soit (x'_k) une autre base hilbertienne de \mathcal{H} . Alors un argument similaire donne

$$\sum_j \|T^* x_j\|^2 = \sum_{j,k} |\langle x'_k, T^* x_j \rangle|^2 = \sum_{j,k} |\langle T x'_k, x_j \rangle|^2 = \sum_k \|T x'_k\|^2.$$

Ceci termine la preuve. ■

5.1.20 REMARQUE

1. Une conséquence de la démonstration, on obtient dans (5.1.2) que $\|T^*\|_{\text{HS}} = \|T\|_{\text{HS}}$.

2. $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$.

Soit x un vecteur de norme 1 et $B = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} telle que $x \in B$. Alors $\|Tx\| \leq \sum_k \|Tx_k\|^2 = \|T\|_{\text{HS}}$. En appliquant cette inégalité à tous les x tel que $\|x\| = 1$, on obtient le résultat.

5.1.21 PROPOSITION

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt T est compact .

Démonstration: Soit une base hilbertienne (x_k) de \mathcal{H} . on pose $c = \sum_k \|Tx_k\|^2$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k > N_\varepsilon} \|Tx_k\|^2 \leq \varepsilon^2$.

On pose $F_\varepsilon = \text{Vect}\{y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}\}$, et $P_\varepsilon : H_2 \rightarrow H_2$ la projection orthogonale sur F_ε .

Alors $T_\varepsilon = P_\varepsilon \circ T$ est de rang fini et

$$\|T - T_\varepsilon\|^2 \leq \|T - T_\varepsilon\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{k > N_\varepsilon} \|Tx_k\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ainsi T est limite d'opérateurs de rang fini il est donc compact.

Un exemple d'opérateur de Hilbert-Schmidt :

5.1.23 PROPOSITION (OPÉRATEURS INTÉGRAUX DE HILBERT-SCHMIDT)

Considérons l'opérateur intégral $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ défini par

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s) ds$$

avec un noyau $k(t,s) \in L^2([0, 1]^2)$. Alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et

$$\|T\|_{\text{HS}} = \|k\|_2.$$

Démonstration: Nous allons voir l'intégrale dans la définition de T , comme le produit scalaire de f avec le noyau k . Plus précisément, considérons la fonction $k_t(s) = k(t,s)$, Alors

$$(Tf)(t) = \langle k_t, f \rangle \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Fixons une base orthonormée (x_k) de $L^2[0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} \|T\|_{\text{HS}}^2 &= \sum_k \|Tx_k\|_2^2 = \sum_k \int_0^1 |(Tx_k)(t)|^2 dt = \sum_k \int_0^1 |\langle k_t, x_k \rangle|^2 dt \\ &= \int_0^1 \sum_k |\langle k_t, x_k \rangle|^2 dt \quad (\text{par le théorème de convergence monotone}) \\ &= \int_0^1 \|k_t\|_2^2 dt \quad (\text{par l'identité de Parseval}) \\ &= \|k\|_2^2 \quad (\text{Par définition de } k_t \text{ et le théorème de Fubini}) \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

5.1.3 Alternative de Fredholm

5.1.25 PROPOSITION

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert sur \mathbb{K} et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors

(a) $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp, \quad \ker T^* = (\text{Im } T)^\perp.$

(b) $\overline{\text{Im } T} = (\text{Ker } T^*)^\perp, \quad \overline{\text{Im } T^*} = (\text{ker } T)^\perp.$

(c) $\ker T^* = \{0\}$ si et seulement si $\text{Im } T$ est dense dans \mathcal{H} , où $\ker T = \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\}$, $\text{Im } T = \{y \in \mathcal{H} : y = Tx, x \in \mathcal{H}\}$ et $\overline{\text{Im } T}$ est l'adhérence de $\text{Im } T$ dans l'espace \mathcal{H} .

Démonstration: (a) Soit $x \in \ker T$, alors $Tx = 0$, alors que pour tout $y \in \mathcal{H}$

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = 0,$$

ce qui signifie que $x \in (\text{Im } T^*)^\perp$ et ainsi $\ker T \subset (\text{Im } T^*)^\perp$. Si $x \in (\text{Im } T^*)^\perp$ alors pour tout $y \in \mathcal{H}$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0,$$

ce qui implique $x \in \ker T$ et donc $(\text{Im } T^*)^\perp \subset \ker T$. Donc $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$.

Par ce qui précède et du théorème 4.4.1 nous avons

$$\ker T^* = (((\text{Im } T^*)^*)^\perp)^\perp = (\text{Im } T)^\perp.$$

(b) D'après la partie (a), nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\text{Im } T} &= ((\text{Im } T)^\perp)^\perp = (\ker T^*)^\perp \\ \overline{\text{Im } T^*} &= ((\text{Im } T^*)^\perp)^\perp = (\ker T)^\perp. \end{aligned}$$

(c) Si $\ker T^* = \{0\}$, alors par partie (b)

$$\overline{\text{Im } T^*} = (\ker T^*)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}.$$

Par conséquent $\text{Im } T$ est dense dans \mathcal{H} . Inversement, si $\text{Im } T$ est dense dans \mathcal{H} Alors par (a),

$$\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp = (((\text{Im } T)^\perp)^\perp)^\perp = (\mathcal{H})^\perp = \{0\}.$$

5.1.27 COROLLAIRE

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors la décomposition orthogonale devient :

$$\mathcal{H} = \overline{\text{Im } T} \oplus \ker T^* = \overline{\text{Im } T^*} \oplus \ker T.$$

5.1.28 THÉORÈME (ALTERNATIVE DE FREDHOLM)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert sur \mathbb{K} et $T \in K(\mathcal{H})$ un opérateur compact.

Alors

- i) $\ker(I - T)$ est de dimension finie.
 - ii) $\text{Im}(I - T)$ est fermé.
 - iii) $\ker(I - T) = 0$ si et seulement si $\text{Im}(I - T) = \mathcal{H}$
-

Démonstration: i) Supposons que $\mathcal{M} := \ker(I - T)$ est de dimension infinie. Comme le noyau d'un opérateur linéaire borné est fermé, l'espace \mathcal{M} est alors un espace de Hilbert de dimension infinie, et il existe une suite orthonormée $\{e_n\}$ dans \mathcal{M} . Il s'ensuit que $Te_n = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{e_n\}$ est orthonormée, la suite $\{e_n\}$ n'a pas de sous-suite convergente. Ceci contredit la compacité de T . Donc $\dim \ker(I - T) < +\infty$.

- ii) Soit $\{y_n\}$ une suite de $\text{Im}(I - T)$ avec $y_n \rightarrow y$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il s'agit de montrer que $y \in \text{Im}(I - T)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathcal{H}$ tel que $y_n = (I - T)x_n$. D'après ce qui précède $\ker(I - T)$ est fermé, il résulte du théorème 4.3.2 que $x_n = u_n + v_n$ avec $u_n \in \ker(I - T)$ et $v_n \in \ker(I - T)^\perp$. Nous affirmons que la suite $\{v_n\}$ est bornée. Sinon, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\|v_n\| \neq 0$ pour tout n et que $\|v_n\| \rightarrow \infty$. Soit $w_n := v_n/\|v_n\|$, alors $w_n \in \ker(I - T)^\perp$ avec $\|w_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$(I - T)w_n = \frac{y_n}{\|v_n\|} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

car $\{y_n\}$ est bornée. D'après, la compacité de T , $\{Tw_n\}$ converge (quitte à prendre une sous-suite si nécessaire). Ainsi, on obtient que $\{w_n\}$ converge vers un élément $w \in \mathcal{H}$. Il est clair que $\|w\| = 1$ et

$$(I - T)w = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T)w_n = 0,$$

ce qui donne $w \in \ker(\lambda I - T)$. Cependant $w_n \in \ker(\lambda I - T)^\perp$ implique

$$\|w - w_n\|^2 = \langle w - w_n, w - w_n \rangle = 1 + 1 = 2,$$

ce qui contredit $w_n \rightarrow w$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'où la suite $\{v_n\}$ est bornée.

Maintenant, par la compacité de T on peut supposer que $\{Tv_n\}$ est convergente (quitte à prendre une sous-suite si nécessaire). D'après $v_n = ((I - T)v_n + Tv_n) = (y_n + Tv_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que la suite $\{v_n\}$ converge vers $v \in \mathcal{H}$.

Alors

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)v_n = (\lambda I - T)v,$$

Cela prouve que $\text{Im}(\lambda I - T)$ est fermé.

iii) Soit $V := I - T$ et supposons que $V^{-1}\{0\} = \{0\}$. On pose $E_n := V^n(\mathcal{H})$ et notez que

$$E_n = V^n(\mathcal{H}) = V^{n-1}(V(\mathcal{H})) \subset V^{n-1}(\mathcal{H}) = E_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

D'après i) , nous savons que E_n est fermé pour tous $n \geq 1$. Supposons que $E_{n+1} \neq E_n$ pour tous $n \geq 1$. Alors il existe une suite $\{x_n\} \subset E_n \subset \mathcal{H}$ avec $\|x_n\| = 1$ tel que

$$\|Tx_n - Tx_m\|_{\mathcal{H}} > \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } n \neq m,$$

en contradiction avec la compacité de T . Donc, $E_{n+1} = E_n$ pour un certain $n \geq 1$. Nous allons montrer que $\mathcal{H} = E_0 = E_1$. Supposons que ce n'est pas vrai, c'est à dire $E_0 \neq E_1$. Soit $m \geq 1$ le plus petit entier positif tel que

$$E_{m-1} \neq E_m = E_{m+1}.$$

Nous choisissons $y \in E_{m-1} \setminus E_m$, alors $V(y) \in E_m = E_{m+1}$. Par conséquent, nous pouvons trouver $z \in E_m$ tel que

$$V(y) = V(z) \quad \text{et} \quad y \neq z$$

car $y \notin E_m = E_{m+1}$. Donc $V(y - z) = 0$ et ainsi de $y - z \in \ker V$, en contradiction avec l'hypothèse que $V^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Donc V est surjective.

Réciproquement, si $\text{Im}(I - T) = \mathcal{H}$, alors $\{0\} = \text{Im}(I - T)^\perp = \ker(I - T^*)$ d'où $\text{Im}(I - T^*) = \mathcal{H}$ alors $\text{Im}(I - T^*)^\perp = \{0\}$ d'où $\ker(I - T) = \{0\}$. ■

5.2 Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts

Rappelons que si A est une matrice carrée $n \times n$, un nombre complexe λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$ tel que

$Ax = \lambda x$, ce qui signifie que $(\lambda I - A)x = 0$, c'est-à-dire $\lambda I - A$ n'est pas inversible, où I est la matrice identité sur \mathbb{R}^n . Comme les valeurs propres ont de nombreuses applications en dimension finie, il est naturel d'essayer d'étendre ces notions à des espaces de dimension infinie. C'est le but de cette partie. Comme l'adjoint est un outil qui aide à déterminer quand un opérateur est inversible dans les espaces de Hilbert, nous limiterons notre étude aux espaces de Hilbert, bien que les définitions que nous allons présenter peuvent facilement être étendues à des espaces de Banach.

5.2.1 Le spectre d'un opérateur

5.2.1 DÉFINITION

Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et T un endomorphisme de E .

On appelle

- Spectre de T est l'ensemble

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ ne soit pas inversible}\}$$

- Spectre ponctuel de T est l'ensemble

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

i.e. l'ensemble des valeurs propres de T . On appelle multiplicité de la valeur propre λ , la dimension du sous-espace propre $\ker(\lambda I - T)$.

5.2.2 REMARQUE

a) On a toujours $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

b) Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. Explicitement, soit E un espace vectoriel et T un opérateur linéaire sur E . Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de T et pour chaque $1 \leq j \leq k$, x_j un vecteur propre correspondant à λ_j . Alors x_1, x_2, \dots, x_k sont linéairement indépendants.

Démonstration: Supposons qu'ils soient linéairement dépendants et soit une combinaison

$$\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^k \alpha_j x_j = 0$$

avec $\alpha_1 \neq 0$. Soit P un polynôme tel que $P(\lambda_1) = 1$ et $P(\lambda_j) = 0$ pour $j \geq 2$. On remarque que $P(T)x_j = P(\lambda_j)x_j$, $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'opérateur $P(T)$. Par application de $P(T)$, nous obtenons

$$0 = \alpha_1 P(T)x_1 + \sum_{j=2}^k \alpha_j P(T)x_j = \alpha_1 x_1.$$

Ainsi, $\alpha_1 = 0$ car $x_1 \neq 0$, ce qui est une contradiction. Nous répétons le même processus pour le reste des α_i . ■

5.2.4 EXEMPLE. Soit I est l'opérateur identité de l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Il est clair que $\sigma(I) = \{1\}$, car $\lambda I - I = (\lambda - 1)I$ est inversible si $\lambda - 1 \neq 0$. De même, si $\mu \in \mathbb{K}$, alors $\sigma(\mu I) = \{\mu\}$.

5.2.5 EXEMPLE. Soit \mathcal{V} est un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, chaque opérateur linéaire T sur \mathcal{V} peut être représenté par une matrice carrée A , et que l'opérateur linéaire $(\lambda I - T)$ est inversible précisément lorsque la matrice $(\lambda I - A)$ est inversible. Il est clair que pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ l'un des cas suivants doivent apparaître :

- (1) λ est une valeur propre de A ;
- (2) $\lambda I - A$ est une matrice inversible, c'est à dire la matrice $(\lambda I - A)^{-1}$ existe.

Il en résulte que le spectre $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ est précisément l'ensemble des valeurs propres de la matrice A , et la dimension de l'espace des vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre est finie.

Nous voyons dans l'exemple ci-dessus que le spectre d'un opérateur linéaire dans d'un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie le spectre peut être très différent et plus complexe.

5.2.6 EXEMPLE (OPÉRATEUR DIAGONAL SUR $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$). Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$. On définit l'opérateur T sur ℓ^2 par

$$T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Comme $(T - \lambda I)x = ((\lambda_k - \lambda)x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, nous avons $(T - \lambda I)^{-1}y = (\frac{y_k}{\lambda_k - \lambda})_{k \in \mathbb{N}}$. Il en résulte que $(T - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné si et seulement si λ n'est pas dans l'adhérence de $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, qui n'est autre que $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$.

Tous les λ_k sont clairement des valeurs propres de T comme $Te_k = \lambda_k e_k$ pour la base canonique (e_k) de ℓ^2 . Mais 0 n'est pas valeur propre car T est injective (comme tous les $\lambda_k \neq 0$). Notre conclusion est la suivante :

$$\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{0\}, \quad \sigma_p(T) = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

5.2.7 EXEMPLE (OPÉRATEUR DE MULTIPLICATION SUR $L^2[0, 1]$). Considérons l'opérateur de multiplication $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ définie par $(Tf)(t) = tf(t)$.

Comme $(T - \lambda I)f(t) = (t - \lambda)f(t)$, nous avons

$$(T - \lambda I)^{-1}y(t) = \frac{1}{t - \lambda}y(t). \tag{5.2.1}$$

Si $\lambda \notin [0, 1]$ alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t - \lambda}$ est bornée, donc $(T - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné.

Inversement, si $\lambda \in [0, 1]$, alors $\frac{1}{t-\lambda} \notin L^2[0, 1]$ en raison de la singularité non-intégrable en $t = \lambda$. D'où $T - \lambda I$ n'est pas inversible (à $y(t) \equiv 1$). Par conséquent, tous ces λ sont des points réguliers. Par conséquent, $\sigma(T) = [0, 1]$.

Supposons que λ soit une valeur propre de T avec f un vecteur propre dans $L^2[0, 1]$. Cela signifie que l'identité suivante est vérifiée

$$(t - \lambda)f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Il en résulte que $f = 0$ dans $L^2[0, 1]$. Par conséquent, T n'a pas de valeurs propres. Notre conclusion est la suivante :

$$\sigma(T) = [0, 1], \quad \sigma_p(T) = \emptyset.$$

5.2.8 EXEMPLE (OPÉRATEUR SHIFT). Considérons les opérateurs de décalage à droite et à gauche sur ℓ^2 , agissant sur un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots)$ par

$$R(x) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad L(x) = (x_2, x_3, \dots).$$

comme R est clairement injective mais comme $\text{Im } R$ n'est pas dense dans ℓ^2 , 0 est dans le spectre de R . Montrer que

$$\begin{aligned} \sigma(R) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, & \sigma_p(R) &= \emptyset, \\ \sigma(L) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, & \sigma_p(L) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}. \end{aligned}$$

Le spectre est un compact

5.2.9 LEMME (VON NEUMANN)

Soit X un espace de Banach.

Considérons un opérateur $U \in \mathcal{L}(X)$ telle que $\|U\| < 1$. Alors $I - U$ est inversible et son inverse peut être exprimé comme une série convergente dans $\mathcal{L}(X)$:

$$(I - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} U^k, \quad \|(I - U)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|U\|}.$$

Démonstration: La série $\sum_{k=0}^{\infty} U^k$ est absolument convergente car $\|U^k\| \leq \|U\|^k$, et $\|U\| < 1$, donc convergente car $\mathcal{L}(X)$ est un Banach. De plus,

$$(I - U) \sum_{k=0}^{\infty} U^k = \sum_{k=0}^{\infty} U^k (I - U) = \sum_{k=0}^{\infty} (U^k - U^{k+1}) = I$$

comme série télescopique. Enfin,

$$\|(I - U)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|U\|^k \leq \frac{1}{1 - \|U\|}.$$

Ceci termine la preuve. ■

5.2.11 PROPOSITION

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Le spectre $\sigma(T)$ de T est un sous-ensemble compact de \mathbb{K} contenu dans $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

Démonstration: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$.

On a $T - \lambda I = \lambda(\lambda^{-1}T - I)$. Comme $\|\lambda^{-1}T\| < 1$, le lemme de von Neumann 5.2.9 implique que l'opérateur alors $T - \lambda I$ est inversible, donc $\lambda \notin \sigma(T)$ i.e. $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

Il reste à montrer que $\sigma(T)$ est fermé. Soit $\lambda_0 \notin \sigma(T)$, alors $S = T - \lambda_0 I$ est inversible.

Alors $T - \lambda I = S - (\lambda_0 - \lambda)I = S(I - (\lambda_0 - \lambda)S^{-1})$, d'après le lemme 5.2.9, $T - \lambda I$ est inversible si $\|(\lambda_0 - \lambda)S^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|S^{-1}\| < 1$, donc si $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$. Ainsi le disque $\{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}\}$ est contenu in $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. Ce qui montre que $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ est ouvert et donc $\sigma(T)$ est fermé.

5.2.13 THÉORÈME (PROPRIÉTÉS DU SPECTRE D'UN OPÉRATEUR COMPACT)

Soit \mathcal{H} est un espace de Hilbert sur \mathbb{K} et T un opérateur compact sur \mathcal{H} , alors :

- (i) Si \mathcal{H} est de dimension infinie, $0 \in \sigma(T)$.
- (ii) $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ et toute valeur propre est de multiplicité finie.
- (iii) Soit $\delta > 0$, alors l'ensemble des valeurs propres deux à deux disjointes et de module $\geq \delta$ est fini. Par conséquent, si $\sigma(T)$ contient une suite d'éléments deux à deux disjointes, alors cette suite converge vers 0.

Démonstration: (i) Si $0 \notin \sigma(T)$ alors T est un isomorphisme, contredit T compact d'après 5.1.6.

(ii) Soit $\lambda \neq 0$, si $\lambda \notin \sigma_p(T)$, alors $T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T)$ est injectif et d'après 5.1.28 $T - \lambda I$ est surjectif, donc $\lambda \notin \sigma(T)$.

(iii) Soit $\delta > 0$. Supposons qu'il existe une suite Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, formée d'éléments deux à deux disjointes tels que $|\lambda_n| \geq \delta$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n un vecteurs propres associé à la valeur propre λ_n i.e. $T(x_n) = \lambda_n x_n$.

On pose $H_n = \text{Vect}\{x_0, \dots, x_n\}$. Alors $T(H_n) \subset H_n$ et $(T - \lambda_n I)H_n \subset H_{n-1}$.

Par le précédé d'ortonormalisation, on construit une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\|e_n\| = 1$ et $e_n \perp H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour $n > m$, on a $Te_n - Te_m = \lambda_n e_n + \underbrace{(Te_n - \lambda_n e_n) - Te_m}_{\in H_{n-1}}$, d'où

$$\|Te_n - Te_m\| \geq \inf_{z \in H_{n-1}} \|\lambda_n e_n - z\| = \|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n| \geq \delta > 0.$$

Ceci entraîne que $(Te_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence, contredit ainsi la compacité de T . ■

5.2.2 Opérateurs auto-adjoints

Définition et exemples

Soit T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert, soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Rappelons 4.4.1, que l'opérateur adjoint $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est définie par $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pour $x, y \in \mathcal{H}$.

5.2.15 DÉFINITION

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit **auto-adjoint** si $T^* = T$, i.e.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

5.2.16 EXEMPLE. Des exemples de opérateurs auto-adjoints suivants :

- (i) L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.
- (ii) opérateurs linéaires sur \mathbb{C}^n donné par des matrices hermitiennes (a_{ij}) , c'est à dire telles que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$;
- (iii) opérateur intégral $(Tf)(t) = \int_0^1 k(s, t)f(s) ds$ sur $L^2[0, 1]$ avec un noyau hermitien, c'est à dire tel que $k(s, t) = \overline{k(t, s)}$;
- (iv) Les projections orthogonales P sur \mathcal{H} . (Pourquoi?)

Chaque opérateur linéaire borné peut être décomposée en deux opérateurs auto-adjoints :

5.2.17 LEMME

Chaque opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ peut être représenté de manière unique comme

$$A = T + iS$$

où $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sont opérateurs auto-adjoints.

Démonstration: Si $A = T + iS$, alors $A^* = T - iS$. La résolution de ces deux équations, nous voyons que le lemme avec $T = \frac{A+A^*}{2}$ et $S = \frac{A-A^*}{2i}$. ■

5.2.19 EXEMPLE. Montrer que l'ensemble des opérateurs auto-adjoints forme un sous-espace linéaire fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

5.2.20 DÉFINITION (SOUS-ESPACE INVARIANT)

Un sous-espace E de \mathcal{H} est un *sous-espace invariant par T* si $T(E) \subseteq E$.

5.2.21 EXEMPLE. Chaque sous-espace propre de T est invariant. Plus généralement, l'espace engendré par n'importe quel sous-ensemble de vecteurs propres de T est un sous-espace invariant.

5.2.22 PROPOSITION

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint. Si $E \subseteq \mathcal{H}$ est un sous-espace invariant par T alors E^\perp est aussi un sous-espace invariant par T .

Démonstration: Soit $x \in E^\perp$; nous allons vérifier que $Tx \in E^\perp$. Soit $y \in E$ arbitrairement. Alors $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0$ car $x \in E^\perp$ et $y \in E$, donc $Ty \in E$. ■

5.2.24 REMARQUE

Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur auto-adjoint, Alors

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle},$$

Ainsi $\langle Tx, x \rangle$ est un nombre réel.

5.2.25 LEMME

Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur auto-adjoint. Alors toutes les valeurs propres de T sont réelles (c.-à-d $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$) et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

Démonstration: Soit λ une valeur propre de T avec un vecteur propre $x (\neq 0)$. Alors

$$\langle Tx, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle,$$

donc, à partir Remarque 5.2.24, nous avons

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Aussi, si μ est une autre valeur propre de T avec un vecteur propre y , alors nous avons

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \overline{\mu} \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

car μ est réel. Il en résulte que $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$. Parce $\lambda \neq \mu$, nous concluons que $\langle x, y \rangle = 0$, ce qui signifie que $x \perp y$. ■

5.2.27 LEMME (NORME D'UN OPÉRATEUR AUTO-ADJOINT)

Soit \mathcal{H} et T comme dans *lemme 5.2.25*. Alors

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Démonstration: Soit $\alpha := \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\}$. Il suffit de prouver que

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \alpha \|x\| \|y\|$$

pour tous x et y . On peut évidemment supposer que x et y sont non nul. De plus, nous pouvons multiplier y par un nombre complexe β de module un ($|\beta| = 1$) pour obtenir $\Re \langle Tx, \beta y \rangle = |\langle Tx, y \rangle|$, on peut donc supposer que $\langle Tx, y \rangle \geq 0$. Pour chaque $x, y \in \mathcal{H}$, comme $T^* = T$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), x+y \rangle &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \overline{\langle Tx, y \rangle} + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + 2\Re \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle, \end{aligned}$$

De même,

$$\langle T(x-y), x-y \rangle = \langle Tx, x \rangle - 2\Re \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle.$$

Alors

$$\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 4\Re \langle Tx, y \rangle = 4|\langle Tx, y \rangle|,$$

si

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \frac{\alpha}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{\alpha}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

Maintenant, on applique cette inégalité à $\sqrt{\|y\|/\|x\|} x$ à la place de x et $\sqrt{\|x\|/\|y\|} y$ à la place de y .

5.2.29 DÉFINITION

Un opérateur auto-adjoint $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit positif si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

5.2.30 LEMME

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint positif alors :

$$\|Tx\|^2 \leq \|T\| \langle Tx, x \rangle$$

Démonstration: Si $Ax = 0$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc $Ax \neq 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la forme hermitienne positive $(u, v) \mapsto \langle Tu, v \rangle$ on a

$$|\langle Tu, v \rangle|^2 \leq \langle Tu, u \rangle \cdot \langle Tv, v \rangle$$

En particulier, pour $u = x$ et $v = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ on obtient l'inégalité

$$\|Tx\|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \cdot \langle Tv, v \rangle \leq \|T\| \langle Tx, x \rangle.$$

5.2.32 LEMME

Soit \mathcal{H} est un espace de Hilbert et $T \in K(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint et compact. Soit $M := \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$. Si M est non nul, l'opérateur T admet M comme valeur propre.

Démonstration: On suppose $M \neq 0$

Soit $(x_n) \in \mathcal{H}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Tx_n, x_n \rangle = M$. Comme T est compact, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que (Tx_n) converge vers $y \in \mathcal{H}$. Alors l'opérateur $MI - T$, est auto-adjoint positif et d'après le lemme précédent

$$\|(MI - T)x_n\|^2 = \|MI - T\| \cdot \langle (MI - T)x_n, (MI - T)x_n \rangle \leq M^2 + M^2 - 2M \langle Tx_n, x_n \rangle,$$

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(MI - T)x_n\| = 0$. Puisque (Tx_n) converge vers y , on déduit que la suite (x_n) converge vers $z = \frac{y}{M}$. D'où $\|z\| = 1$ et $Tz = Mz$, ainsi $M \in \sigma(T)$. ■

5.2.34 COROLLAIRE

Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors T admet une valeur propre λ tel que $|\lambda| = \|T\|$.

Démonstration: Si $T = 0$, tous les vecteurs non nuls sont associés à la valeur propre $0 = \|T\|$.

Supposons $T \neq 0$. D'après le lemme précédent

$$\sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \langle T^2x, x \rangle = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \langle Tx, Tx \rangle = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2$$

est valeur propre de T^2 .

Ainsi, il existe un vecteur $v \in \mathcal{H} - \{0\}$ tel que :

$$0 = T^2v - \|T\|^2v = (T + \|T\|) \circ (T - \|T\|)v.$$

Si $(T - \|T\|)v = 0$, alors $\|T\|$ est valeur propre de T , sinon $v_1 = (T - \|T\|)v \neq 0$ et $(T + \|T\|)v_1 = 0$, d'où $-\|T\|$ est valeur propre de T . ■

Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

5.2.36 THÉORÈME (DIAGONALISATION DES OPÉRATEURS AUTO-ADJOINTS COMPACTS)

Soit \mathcal{H} est un espace de Hilbert sur \mathbb{K} et $T \in K(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une base hilbertienne de \mathcal{H} formée de vecteurs propres de T .

Démonstration: On désigne par \mathcal{B} l'ensemble des parties U de \mathcal{H} qui vérifient les conditions (*)

$$\begin{cases} x \in U \Rightarrow \|x\| = 1 \\ x, y \in U \text{ et } x \neq y \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \\ x \in U \Rightarrow Tx \in \mathbb{K}x = \text{Vect}\{x\} \end{cases} \quad (*)$$

ordonné par l'inclusion (\subset) des parties de \mathcal{H} .

Montrons que (\mathcal{B}, \subset) est inductif.

Soit $\mathcal{C} = \{B_i, i \in I\}$ chaîne de \mathcal{B} i.e. une partie totalement ordonnée de (\mathcal{B}, \subset)

Alors pour montrer que $\bigcup_{i \in I} B_i$ est un majorant de \mathcal{C} , il suffit de montrer que $\bigcup_{i \in I} B_i$ vérifie (*).

En effet, soit $x, y \in \bigcup_{i \in I} B_i$, $x \neq y$, alors il existe $j \in I$ tel que $x, y \in B_j$, d'où $\|x\| = \|y\| = 1$, $Tx \in \mathbb{K}x$, $Ty \in \mathbb{K}y$ et $\langle x, y \rangle = 0$. Ainsi on a montré que $\bigcup_{i \in I} B_i$ vérifie (*).

D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal B dans \mathcal{B} . Alors B est une base hilbertienne de \mathcal{H} formée de vecteurs propres : En effet, les deux premières conditions de (*) montrent que les éléments de B forment un système orthonormé et que la troisième condition qu'ils sont des vecteurs propres de T .

Il suffit de montrer que B est total i.e. $\overline{\text{Vect}(B)} = \mathcal{H}$. Sinon, $H_0 = \overline{\text{Vect}(B)}^\perp \neq \emptyset$. On note $T_0 = T|_{H_0}$.

D'après le lemme 5.2.22, H_0 est stable par T , d'où $T_0 : H_0 \rightarrow H_0$ définit un opérateur auto-adjoint compact.

D'après le corollaire 5.2.34, on peut trouver $v_0 \neq 0$ qui soit vecteur propre de T_0 associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \|T_0\|$.

Mais alors $B \cup \{v_0\}$ est un système vérifiant (*) et qui contient strictement B , ceci contredit le caractère maximal de B . Donc B est total et par suite une base hilbertienne de \mathcal{H} .

Maintenant, nous pouvons énoncer ce qu'on appelle **le théorème spectral** pour opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert séparable.

5.2.38 THÉORÈME

Soient \mathcal{H} est un espace de Hilbert de dimension infinie séparable et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} formée de vecteurs propres de T , de sorte que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H},$$

où λ_n est la valeur propre associée à e_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration: D'après le lemme 5.2.36, nous savons qu'il existe une base hilbertienne de \mathcal{H} formée de vecteurs propres de T . Cette base est dénombrable car \mathcal{H} est séparable. On la note $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pour chaque $x \in \mathcal{H}$ et $m > k \geq 1$, on a

$$\left\| \sum_{n=k}^m \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=k}^m |\lambda_n \langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{n=k}^m |\langle x, e_n \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad \text{que } k, m \rightarrow \infty.$$

Donc $\sum_{n=k}^m \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans \mathcal{H} .

De plus, si $x \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| \leq 1$ alors pour tout $m \geq 1$, nous avons

$$\left\| \sum_{n=1}^m \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{n=1}^m |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|T\|^2 \|x\|^2. \tag{5.2.2}$$

Par conséquent, si nous définissons

$$Lx = \sum_{n=1}^m \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

à partir de (5.2.2), nous constatons que $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Notez que $L(e_n) = T(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par linéarité et continuité, on aura $T = L$. ■

5.2.3 Exercices supplémentaires

5.2.40 Exercice 1. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que

$$\sigma(T + \mu I) = \sigma(T) - \mu \quad \text{pour tout } \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $y, z \in \mathcal{H}$. Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par $Tx = \langle x, y \rangle z$ est compact.
3. On définit les opérateurs S et $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ par

$$Sx = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right), \quad Tx = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

Montrer que ces opérateurs sont compacts, $\sigma(S) = \{0\}$, $\sigma_p(S) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$. Montrer également que $\mathfrak{Im}S$ n'est pas dense dans ℓ^2 , mais que $\mathfrak{Im}T$ est dense.

4. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour l'ensemble $X \in \mathcal{H}$ si et seulement si T est auto-adjoint

5. Soit \mathcal{H} un Hilbert l'espace sur \mathbb{K} et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint. Montrer que S^n est auto-adjoint pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et conclure que $\|S^n\| = \|S\|^n$.
6. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert complexe \mathcal{H} . Montrer que si $\sigma(T)$ contient exactement un point λ alors $T = \lambda I$.
7. Montrer qu'une suite orthonormale $\{e_n\}$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} n'a pas de sous-suite convergente.
8. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de dimension infinie avec une base orthonormée $\{e_n\}$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que si T est compact alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Te_n\| = 0$.
9. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de dimension infinie et soit $\{e_n\}$ et $\{\widehat{e}_n\}$ deux suites orthonormales de \mathcal{H} . Soit $\{\alpha_n\}$ est suite dans \mathbb{C} , on définit un opérateur linéaire $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ par $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle \widehat{e}_n$. Montrer que
 - a) T est continu si et seulement si la suite $\{\alpha_n\}$ est bornée.
 - b) T est compact si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$
 - c) $y \in \text{Im } T$ si et seulement si $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \widehat{e}_n$ pour certains $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, et en déduire que si une infinité de α_n sont non nuls et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, alors $\text{Im } T$ n'est pas fermé.
10. Soit \mathcal{H} est un Hilbert espace, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint compact sur \mathcal{H} et \mathcal{N} est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} , qui est invariant par T (ie $T(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$). Soit $T|_{\mathcal{N}}$ désigne la restriction de T à \mathcal{N} . Montrer que $T|_{\mathcal{N}}$ est un opérateur auto-adjoint compact sur l'espace de Hilbert \mathcal{N} .

5.3 Annexe

5.3.1 Ensembles compacts dans les espaces normés

La compacité est un substitut utile à la dimension finie. Nous supposons que le lecteur est familier avec la notion de compacité d'un cours de base en topologie.

5.3.2 Rappel sur la compacité

Par définition, un sous-ensemble A d'un espace topologique (X, τ) est compact si de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini. Plus précisément, si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ pour une collection d'ensembles ouverts $U_i, i \in I$, alors $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ pour certains sous-famille finie $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$. (propriété de Borel-Lebesgue).

Quelques propriétés fondamentales des ensembles compacts :

- (i) un sous-ensemble compact d'un espace séparé est fermé ;

5. Opérateurs compacts et théorie spectrale sur les espaces de Hilbert: Annexe 187

- (ii) un sous-ensemble fermé d'un compact est compact ;
- (iii) l'images d'un compact par une application continue est un compact ;
- (iv) Les fonctions continues sur un compact sont uniformément continues et elles atteignent leur maximum et minimum.

Dans un espace métrique (X, d) , une autre description, pratique, des ensembles compacts A est donnée en termes de ε -réseaux.

Soit $\varepsilon > 0$. Un sous-ensemble \mathcal{N}_ε est un ε -réseau de A , si pour tout $x \in A$, il existe $y \in \mathcal{N}_\varepsilon$ tels que $d(x, y) \leq \varepsilon$. De façon équivalente, \mathcal{N}_ε est un ε -réseau de A si A peut être recouvert par des boules de rayon ε centrée en des points de \mathcal{N}_ε . On note par $N(A, \varepsilon)$ le cardinal minimum pour un ε -réseau de (A, d) .

5.3.1 DÉFINITION

Soit un espace métrique (X, d) .

Une partie A est **précompacte** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε -réseau fini de A i.e. il existe un sous-ensemble fini \mathcal{N}_ε tel que $A \subset \bigcup_{x \in \mathcal{N}_\varepsilon} B(x, \varepsilon)$.

5.3.2 THÉORÈME

Pour un sous-ensemble A d'un espace métrique X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est précompact ;
 - (ii) Si toute suite (x_n) dans A admet une sous-suite de Cauchy.
 - (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε -réseau de cardinal fini de A .
-

5.3.3 COROLLAIRE (COMPACTITÉ DANS LES ESPACES MÉTRIQUES)

Pour un sous-ensemble A d'un espace métrique X , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est compact
 2. Si toute suite de E admet une valeur d'adhérence
 3. précompact et complet
-

En conséquence, les ensembles précompact dans les espaces métriques sont bornés.

5.3.4 THÉORÈME (HEINE-BOREL)

Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé de dimension finie X est précompact si et seulement si A est bornée.

5.3.5 Exercice (Dimension métrique) Soit (A, d) un espace métrique compact. On appelle dimension métrique le nombre

$$\dim(A) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N(X, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \in [0, +\infty]$$

(i) Soit B_X la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, de dimension finie n .

Montrer que $(\frac{1}{\varepsilon})^n \leq N(B_X, \varepsilon) \leq (1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$. En déduire que $\dim(B_X) = n$.

(ii) Si $C = \left\{ x \in [0, 1]; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}, a_n \in \{0, 2\} \right\}$ est l'ensemble triadique de Cantor, alors $\dim C = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

5.3.3 Compacité en dimension infinie

En dimension infinie espaces normés, théorème de Heine-Borel échoue. Par exemple, une base orthonormée (e_k) de ℓ^2 est un ensemble borné, mais il n'est pas précompact, car il n'a pas de sous-suite convergente (Comme $\|e_k - e_j\| = \sqrt{2}$ pour $k \neq j$).

Ensembles compacts sont presque finies dimensionnelles. Cette heuristique, qui est fait de rigueur dans le résultat suivant, sous-tend de nombreux arguments dans l'analyse :

5.3.6 LEMME (APPROXIMATION PAR DES SOUS-ESPACES DE DIMENSIONS FINIES)

Un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé X est précompact si et seulement si A est bornée et, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace de dimension finie Y de X , ce qui soit un ε -réseau de A .

Démonstration: Nécessité. Supposons A précompact. Choisissez un ε -réseau fini \mathcal{N}_ε de A . Alors le sous-espace $Y := \text{Vect}(\mathcal{N}_\varepsilon)$ est de dimension finie et forme un ε -réseau de A .

Suffisance. Comme A est bornée, $A \subseteq rB_X$ pour un certain $r > 0$. Comme Y est un ε -réseau de A , il s'ensuit que $(r + \varepsilon)B_Y$ est aussi un ε -réseau de A . De plus, comme Y est de dimension finie, l'ensemble $(r + \varepsilon)B_Y$ est précompact par le théorème de Heine-Borel. Donc, nous avons trouvé un ε -réseau fini de A . Par conséquent A est lui-même précompact. ■

Par le théorème de Heine-Borel, la boule unité fermée B_X , d'un espace vectoriel normé de dimension finie X , est compact. Ceci n'est pas vrai en dimension infinie :

5.3.8 THÉORÈME (F. RIESZ)

La boule unité fermée B_X d'un espace vectoriel normé de dimension infinie X n'est jamais compacte.

Démonstration: Supposons B_X est compact. Par le lemme d'approximation 5.3.6, on peut trouver un sous-espace de dimension finie Y de X qui forme un $\frac{1}{2}$ -réseau de B_X , c'est à dire

$$\text{dist}(x, y) \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } x \in B_X. \quad (5.3.1)$$

Comme X est de dimension infinie et Y est de dimension finie, l'espace quotient X/Y est non nul. Ainsi, nous pouvons trouver un classe d'équivalence $[x] \in X/Y$ avec $\|[x]\| = 0,9$. Alors que, par définition $\|[x]\| = \inf_{x \in [x]} \|x\|$, nous pouvons encore choisir un représentant $x \in [x]$ tel que $\|x\| \leq 1$. En résumé, $\text{dist}(x, y) = \|[x]\| = 0,9$ et $x \in B_X$. Cela contredit (5.3.1) et achève la démonstration. ■

Enfin, nous mentionnons sans démonstration un critères de compacité dans l'espace de fonctions continues sur un compact.

5.3.10 THÉORÈME (ASCOLI-ARZELÀ)

Soit (X, d) un espace métrique compact.

L'adhérence d'une partie $A \subseteq C(X, \mathbb{R})$ est compacte si et seulement si

1. A est bornée et
2. *équicontinue i.e.*
pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(s, t) \leq \delta \quad \text{entraîne} \quad |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } f \in A.$$

5.3.11 EXEMPLE. Le théorème d'Arzelà-Ascoli entraîne que l'ensemble des fonctions dérivables f avec $\|f'\|_\infty \leq 1$ est compact dans $C[0, 1]$.