2.1.2 Fonctions continues

2.15 THÉORÈME
Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$.

De plus, si $\sigma_n = \{x_0 = a < \ \ldots < \ x_i = a + i\dfrac{b-a}{n} < \ \ldots < \ x_n = b\}$ est la subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $[a,\ b]$, on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i+t)\frac{b-a}{n}\right)}$$

On en déduit, en prenant $t = 0$, puis $t = 1$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)}$$

Avant de prouver ce résultat, on va faire des rappels sur les fonctions uniformément continues.

2.1.2.1 Fonction uniformément continue

2.16 DÉFINITION
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction où A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
On dit que f est uniformément continue si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \forall x, x' \in A,\ |x - x'| \leq \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \epsilon.$$

2.17 REMARQUE
Toute fonction uniformément continue est continue.

On va donner une formulation de l'uniforme continuité en terme de suites.

2.18 PROPOSITION
Soit $f : A \to \mathbb{R}$. les conditions suivantes sont équivalentes :

1) f est uniformément continue
2) Si (x_n) et (x'_n) sont deux suites équivalentes de A i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - x'_n = 0$ il en est alors, de même de leurs images i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - f(x'_n) = 0$.

Démonstration: 1) $\implies$ 2) Par hypothèse, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x, x' \in A$, $|x - x'| \leq \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \epsilon$. Soient (x_n) et (x'_n) sont deux suites équivalentes de A, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq N$ $|x_n - x'_n| \leq \delta$ d'où $|f(x_n) - f(x'_n)| \leq \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ c-à-d que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - f(x'_n) = 0$.

2) $\implies$ 1) Supposons que f ne soit pas uniformément continue, alors

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, x' \in A,\ \ \text{tels que } |x - x'| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(x')| > \epsilon.$$

En particulier, en prenant $\delta = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver deux suites de A, (x_n) et (x'_n), telles que pour tout $n \geq N^*$, $|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - x'_n = 0$, mais $(f(x_n) - f(x'_n))$ ne tends pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; ceci contredit 2). ■

2.1.3 Exemples et contre-exemples

2.20 EXEMPLE. La fonction identité de de $\mathbb{R}$ est uniformément continue, puisque $|f(x)-f(x')| = |x-x'|$ et il suffit que $\delta = \epsilon$ dans la définition 2.16 .

Plus généralement : Soit $k > 0$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite k-**lipschitzienne** si pour tous $x, x' \in A$ on a $|f(x)-f(x')| \leq k|x-x'|$. Alors toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue (il suffit que $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$ dans la définition 2.16).

2.21 EXEMPLE. La fonction de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue.

En effet, si $x \neq x'$ alors puisque $|\sqrt{x}-\sqrt{x'}| = \dfrac{|x-x'|}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}} \leq \dfrac{|x-x'|}{\sqrt{|x-x'|}} = \sqrt{|x-x'|}$ et il suffit que $\delta = \epsilon^2$ pour vérifier la définition 2.16 .

Plus généralement : Soit $\alpha > 0$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite α-**höldérienne** s'il existe $C > 0$, tel que pour tous $x, x' \in A$ on a $|f(x)-f(x')| \leq C|x-x'|^{\alpha}$.

Alors toute fonction α-höldérienne est uniformément continue (il suffit que $\delta = \left(\dfrac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans la définition 2.16) .

2.22 EXEMPLE. 1) La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. En effet, si on prend $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $x'_n = n$, alors $x_n - x'_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0, mais $f(x_n) - f(x'_n) = 2 + \frac{1}{n^2}$ ne tend pas vers 0.

2) La fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue. En effet, si on prend $x_n = \frac{1}{n+1}$ et $x'_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n - x'_n$ tend vers 0, mais $f(x_n) - f(x'_n) = 1$ ne tend pas vers 0.

On remarquera que dans le premier exemple l'intervalle n'est pas borné et que dans le second il n'est pas fermé.

Le théorème suivant nous dit que si A est un intervalle fermé et borné, toute fonction continue sur A est uniformément continue.

2.23 THÉORÈME (HEINE)

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) f est uniformément continue sur $[a,\ b]$

2) f est continue sur sur $[a,\ b]$

Démonstration: 1) $\Longrightarrow$ 2) est toujours vrai. 2) $\Longrightarrow$ 1) Supposons que f ne soit pas uniformément continue ; l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 2.18 donne l'existence d'un reél $\epsilon > 0$ et de deux suites (x_n) et (x'_n) de $[a,b]$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - x'_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon$.

Maintenant, comme $[a,b]$ est fermé et borné, d'après le théorème de Balzano-Weierstrass, (x_n) admet une sous-suite, notée (x_{n_k}), qui converge vers un certain réel $\ell \in [a,b]$. Alors, (x'_{n_k}) converge vers ℓ et par continuité $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(x'_{n_k}) = f(\ell)$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| = 0$ et qui contredit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon > 0$. On a donc montré que 2) $\Longrightarrow$ 1). ■

On va maintenant démontrer le théorème 2.15

Démonstration: La fonction $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ étant continue sur $[a,\ b]$ est uniformément continue sur $[a,\ b]$ on a donc :

$$(*) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \forall x, x' \in [a,b],\ |x-x'| \leq \delta \implies |f(x)-f(x')| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N} \leq \delta$ et $t \in [0,1]$.
Considérons pour tout $n \geq N$, la subdivision régulière d'ordre n, $\sigma_n = (x_i = a + i\frac{b-a}{n})_{0 \leq i \leq n-1}$ de $[a,b]$ et le n-uplet $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ avec $\xi_i = a + (i+t)\frac{b-a}{n}$. On a donc $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, ainsi par la condition $(*)$ on aura $f(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} \leq f(x) \leq f(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$, Considérons les fonctions en escaliers u_n et v_n définies par :

$$u_n(x) = \begin{cases} f(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[, \; i \in \{0, \dots, n-1\} \\ f(b) \text{ si } t = b \end{cases}$$

$$v_n(x) = \begin{cases} f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[, \; i \in \{0, \dots, n-1\} \\ f(b) \text{ si } t = b \end{cases}.$$

On a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: u_n et v_n sont en escaliers sur $[a, b]$ et vérifient :

(i) $u_n \leq f \leq v_n$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (v_n - u_n)(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)((f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}) - \left(f(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)})\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a} = \frac{b-a}{n} \frac{n\epsilon}{b-a} = \epsilon$, pour $n \geq N$.

On en déduit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et que :

$$\int_a^b u_n(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}\right) = \int_a^b v_n(x)dx.$$

Par suite, puisque : $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \int_a^b u_n(x)dx \leq \int_a^b (v_n - u_n)(x)dx \leq \epsilon$, pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$ et donc pour tout $n \geq N$

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i+t)\frac{b-a}{n}\right)$. ■

On en déduit que l'on a aussi (en prenant $t = 0$ et $t = 1$) :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

2.26 EXEMPLE. Soit $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ et on déduit de ces théorèmes que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} [\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}].$$

On verra ultérieurement que la valeur de cette intégrale peut être calculée en utilisant une primitive de f sur $[0,1]$; ainsi $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t} \cdot dt = \frac{2}{3}$.

2.27 Exercice Calculer l'intégrale de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ obtenue comme limite de sommes de Riemann dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sin x$ sur $[a,b]$.

2) $f(x) = \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3) $f(x) = \alpha^x$ sur $[a, b]$ (on prend $\alpha > 0$).

2.1.4 Sommes de Riemann

2.28 DÉFINITION (SOMME DE RIEMANN)
Soit $\sigma = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On considère un n-uplet $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ formé de n points de $[a, b]$ répartis selon : $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
La somme de Riemann $S(f, \sigma, \xi)$ associée à la fonction f, à σ et au choix de ξ est l'expression :

$$\boxed{S(f,\sigma,\xi) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}$$

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision régulière d'ordre n, $\sigma_n = (x_i = a + i\frac{b-a}{n})_{0 \le i \le n-1}$ de $[a, b]$.

Les sommes $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$ et $\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$ sont des sommes de Riemann particulières obtenues en prenant respectivement $\xi = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ et $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$.

Les résultats (Théorèmes 2.11 et 2.15) identifient des familles de fonctions Riemann-intégrables (les fonctions monotones et continues). Ils établissent aussi un lien entre l'intégrabilité d'une fonction f et la convergence (lorsque $n \to \infty$) de certaines sommes de Riemann attachées à f.

2.29 EXEMPLE. la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est continue, d'où $\int_a^b \sin(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

En utilisant, la continuité et la linéarité de la fonction partie imaginaire et la relation $\sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on aura
$\int_a^b \sin(x)dx = \mathfrak{Im}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+k\frac{b-a}{n})}\right) = \mathfrak{Im}\left(e^{ia}\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{b-a}{n}})^k\right) = \mathfrak{Im}\left(e^{ia}\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\frac{e^{i(b-a)}-1}{e^{\frac{i(b-a)}{n}}-1}\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{ib}-e^{ia}}{i}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{i(b-a)}{n}}{e^{i\frac{b-a}{n}}-1}\right)$.
D'autre part $e^z = 1 + z + O(z^2)$ lorsque z est proche de 0, d'où
$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{i(b-a)}{n}}{e^{i\frac{b-a}{n}}-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$

Ainsi $\int_a^b \sin(x)dx = \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{ib}-e^{ia}}{i}\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{ib}}{i}\right) - \mathfrak{Im}\left(\frac{e^{ia}}{i}\right) = -\cos(b) + \cos(a)$.

2.30 EXEMPLE. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \ldots + \sqrt{(n-1)1}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k(n-k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$.

Alors, x_n est une somme de Riemann associée à la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$. La fonction f étant continue, elle est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

D'où (x_n) est convergente et $\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \sqrt{(x(1-x)}dx$.

En remarquant que $y = \sqrt{(x(1-x)} \iff \begin{cases} y^2 + (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \\ y \geq 0 \end{cases}$ (ou par le graphe de f), on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \sqrt{(x(1-x)}dx = \text{ l'aire du demi-cercle centré en } (\frac{1}{2}, 0) \text{ et de rayon } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

2.31 Exercice Montrer que chacune des expressions mises en jeu ci-dessous peut s'interpréter comme une somme de Riemann. Identifier chaque fois la fonction qui permet une telle interprétation. Calculer alors les limites dont il est question.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \frac{k^2}{n^2})^{\frac{1}{n}}$

2.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ (qui sont énoncées en Proposition 1.13) se généralisent aux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, en particulier $\mathcal{R}([a, b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $I : \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R}$ définie par $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire compatible avec l'ordre partiel sur les fonctions.

2.32 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Alors :

(i) $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\int_a^b (f+g)(x)dt = \int_a^b f(x)dt + \int_a^b g(x)dx$.

(ii) Pour tout réel λ, $\lambda \cdot f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$.

(iii) Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

(iv) Si $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(v) **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in]a, b[$, on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ci-dessus, la quantité $\int_a^c f(x)dx$(resp. $\int_c^b f(x)dx$) désigne l'intégrale de la restriction de f au segment $[a, c]$ (resp. $[c, b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{R}([a, b])$.

Démonstration: (i) Il existe des suites (u_n), (v_n), $(\tilde{u}_n)$, $(\tilde{v}_n)$ de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telles que : $u_n \leq f \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(x)dx = 0$.

$\tilde{u}_\epsilon \leq g \leq \tilde{v}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (\tilde{v}_n - \tilde{u}_n)(x)dx = 0$.