3.75 THÉORÈME (RÈGLE D'ABEL)
Soient $f,\ g$ des fonctions localement intégrables sur $[a,\ b[$ telles que :

1) f est décroissante à valeurs positives sur $[a,\ b[$ avec $\lim_{x\to b} f(x) = 0$;
2) il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,\ b\ [,\ \left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq C$$

Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est convergente.

Démonstration: La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire pour $[X,Y] \subset [a,\ b[$:

$$\int_X^Y f(t)g(t)dt = f(X)\int_X^Z g(t)dt$$

pour un certain $Z \in [X,\ Y]$. Comme f est positive et $\lim_{x\to b} f(x) = 0$, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$

$$0 \leq f(x) \leq \epsilon.$$

Alors pour $c < X < Y < b$ on a $\left|\int_X^Y f(t)g(t)dt\right| \leq \epsilon \left|\int_X^Z g(t)dt\right|$
avec :

$$\left|\int_X^Z g(t)dt\right| = \left|\int_a^Z g(t)dt - \int_a^X g(t)dt\right| \leq 2C.$$

On a donc $\left|\int_X^Y f(t)g(t)dt\right| \leq 2C\epsilon$ pour $c < X < Y < b$, en déduit, par le théorème de Cauchy, la convergence de $\int_a^b f(x)g(x)dx$. ∎

3.77 EXEMPLE. Montrons que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors, pour tout réel λ non nul,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$ sont convergentes.

En effet, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\left|\int_0^x \sin(\lambda t)dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}|1-\cos(\lambda x)| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

$$\left|\int_0^x \cos(\lambda t)dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}|\sin(\lambda t)| \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

La fonction f étant décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on déduit de la Règle d'Abel que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$ sont convergentes pour tout réel $\lambda \neq 0$.

Par exemple, les intégrales généralisées, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{1+e^t}dt$ sont convergentes.

3.78 Exercice Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors

$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ converge absolument si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

4 Fonctions définies par des intégrales-Intégrales dépendant d'un paramètre

4.1 Suites de fonctions. Théorème de la convergence dominée

On va considérer, le problème d'intervertion de limite et intégrale généralisé ;

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

le théorème de convergence dominée donne une condition suffisante pour réaliser une telle interversion.

On rappelle tout d'abord les notions de convergence simple et de convergence uniforme sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions.

4.1 DÉFINITION
Soient f et $(f_n)n \in \mathbb{N}$, des fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers** f **sur** A si :
pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est à dire
$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tel que, $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, pour tout $n \ge N$.
2) On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f **sur** A si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, pour tout $n \ge N$ et $\forall x \in A$

$$\text{qui s'écrit aussi } \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

4.2 REMARQUE
Il est clair que la convergence uniforme de $(f_n)n \in \mathbb{N}$ vers f sur A implique la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur A. La réciproque est en générale fausse.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Cette suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

La convergence n'est pas uniforme, en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n$ et $f(1 - \frac{1}{n}) = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,\ 1]}|f_n(x) - f(x)| \ge \lim_{n\to+\infty}|f_n(1 - \frac{1}{n}) - f(1 - \frac{1}{n})| = \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1} > 0$$

ce qui implique que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

4.3 EXEMPLE. La convergence uniforme n'est pas suffisante pour l'interversion limite-intégrale.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{si } x \ge n. \end{cases}$$

Nous avons $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{n}$, par conséquent la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle. Mais

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{n}\,dx = 1 \ne 0 = \int_0^{+\infty} 0\,dx.$$

4.1.1 Théorème de convergence dominée

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour intervertion de limite et intégrale, sa démonstration est hors programme, sera donc admise.

4.4 THÉORÈME (THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE)
Soient $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{R}$, localement intégrables sur I, vérifiant :

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, localement intégrable sur I.
2) Supposons que l'hypothèse suivante, dite de domination, est satisfaite :
   il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$ localement intégrable sur I, telle que $\int_a^b g(x)dx$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq g(x)$.
   Alors $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

4.5 Exercice Montrer que les suites suivantes converges et déterminer leur limite.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,$
2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\ln(1+x))^n + e^x} dx,$

Réponses

1) Nous avons

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ \lim_{n\to+\infty} \sin^n x = 0$$

par conséquent la suite converge simplement vers $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ |\sin^n x| \leq 1$ et l'application constante est intégrable sur un segment.
En utilisant, le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} x^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbb{1}_{\{0\}} dx = 0.$$

2) Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\ln(1+x))^n + e^x} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, e-1[\\ 1 + e^{-x} & \text{si } x = e-1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq \frac{1}{(\ln(1+x))^n + e^x} \leq e^{-x},$$

cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\ln(1+x))^n + e^x} = \int_0^{e-1} e^{-x} dx = 1 - e^{1-e}.$$

4.6 Exercice Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (f(x))^n dx.$$

Réponse : Nous avons $\forall x\in[0,\ 1[,\ 0\leq f(x)<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x))^n=0$. Par conséquent la suite converge simplement vers $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[0,\ 1[\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$.

De plus $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,\ 1],\ |(f(x))^n|=|f(x)|^n\leq 1$ et l'application constante est intégrable sur un segment.

En utilisant, le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (f(x))^n dx=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty}(f(x))^n dx=\int_0^1 \mathbb{1}_{\{0\}}dx=0.$$

4.7 Remarque

1) Dans le théorème de convergence dominée, il est important que la suite converge vers une fonction localement intégrable, sinon l'intégrale généralisée de la limite ne peut être définie.

   De plus une limite simple de fonctions localement intégrables n'est pas toujours une fonction localement intégrable. par example si $\{r_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ une énumération de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. On définit une suite de fonctions en escalier (donc localement intégrable) sur $[0,1]$, par $f_n=\mathbb{1}_{\{r_k,\ 0\leq k\leq n\}}$.

   Nous avons, pour tout $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, il existe $k\in\mathbb{N}$, tel que $x=x_k$, alors $f_n(x)=1$, pour tout $n\geq k$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=1$, d'autre part pour tout $x\notin\mathbb{Q}\cap[0,1]$, on a $f_n(x)=0$, pour tout $n\geq k$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$. Par conséquent la suite (f_n) converge simplement vers la fonction de Dirichlet $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ qui n'est pas localement intégrable sur $[0,1]$.

2) La condition de domination est essentielle comme le montre l'exemple suivant :

4.8 Exemple. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{si } x\in[0,n[\\ 0 & \text{si } x\geq n.\end{cases}$$

Alors $f_{\lfloor x\rfloor+1}(\lfloor x\rfloor)=\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor+1}$ où le symbole $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.

Maintenant, toute fonction localement intégrable, g vérifiant $|f_n|\leq g$ est telle que : pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $g(x)\geq\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor+1}$ par suite,

$\displaystyle\int_0^n g(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}g(x)dx\geq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$ ainsi,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n g(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$. Par conséquent, la fonction g ne peut pas être intégrable sur $[\,0,+\infty[$. Les hypoth'eses du théorème de convergence dominée ne sont pas vérifiées. on a déjà vu que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,\ +\infty[$ vers la fonction $f=0$, mais que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\ =\ 1\ \neq\ \int_0^{+\infty}0\cdot dx\ =\ 0.$$

4.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Les deux thèorèmes suivants sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

4.2.1 Continuité

4.9 THÉORÈME
Soit $I = [a, b[$ et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose

(i) Pour tout $t \in I$, la fonction partielle $f(\,.\,, t) : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J.

(ii) Pour tout $x \in J$, la fonction partielle $f(x\,,.) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est localement intégrable sur sur I.

(iii) (condition de domination)
Il existe une fonction localement intégrable, $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $(x, t) \in J \times I$, $|f(x,\ t)| \leq g(t)$.

Alors l'application $F : J \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

est continue sur l'intervalle J.