Dans tout ce chapitre, $I = [a,\ b]$ désignera un segment fermé borné de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

1 Fonction en escalier (ou étagée)

1.1 Subdivision

1.1 DÉFINITION

On appelle **subdivision** d'un intervalle réel $[a,\ b]$ toute famille finie $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ d'éléments du segment $[a,\ b]$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

On appelle **pas** (ou diamètre) de la subdivision σ le réel positif

$$\|\sigma\| = \max_{0\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})$$

1.2 DÉFINITION (SUBDIVISION RÉGULIÈRE)

On appelle subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $[a,\ b]$ l'unique subdivision σ_n obtenue en découpant l'intervalle $[a,\ b]$ en n sous-intervalles de même longueur. Ainsi :

$\sigma_n := (x_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $\|\sigma_n\| = \frac{b-a}{n}$.

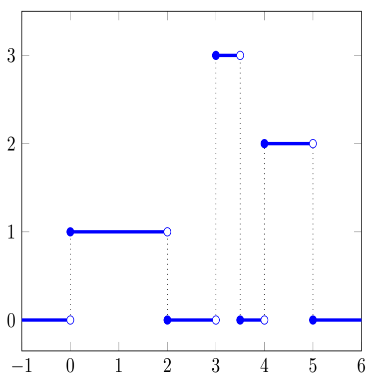
1.3 DÉFINITION

On dit qu'une subdivision σ' est plus fine qu'une subdivision σ si tous les éléments de σ appartiennent à σ'. En particulier $\|\sigma'\| \leq \|\sigma\|$.

On utilisera souvent les notations suivantes :

1) $\sigma \subset \sigma'$ pour signifier que la subdivision σ' est plus fine que la subdivision σ.
2) $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision formée des éléments de σ et σ'. On remarquera que $\sigma \cup \sigma'$ est toujours plus fine que σ et σ'.

1.2 Fonction en escalier



1.4 DÉFINITION (FONCTION EN ESCALIER)
On appelle fonction en escalier ou étagée sur $[a,\ b]$ une fonction $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 < \ \dots < \ x_n\}$ de $[a,\ b]$ telle que, pour tout entier $i \in \{0,\ \dots,\ n-1\}$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$ soit constante.
Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

On désignera par $\mathcal{E}([a,\ b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,\ b]$.

1.5 REMARQUE
Ainsi, si $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est en escalier et si $\sigma = \{x_0 < \ \dots < \ x_n\}$ est une subdivision adaptée à f, il existe des constantes réelles c_i, $i \in \{0,\ \dots,\ n-1\}$ telles que :

$$\forall x \in]x_i,\ x_{i+1}[\ , f(x) = c_i.$$

1.6 REMARQUE
1) Si σ est adaptée à f, alors toute subdivision σ' plus fine que σ est encore adaptée à f.
2) On en déduit que si f et g sont deux applications en escalier, avec des subdivisions adaptées respectives σ et σ', alors $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision adaptée aux deux applications f et g à la fois.

1.7 EXEMPLE. Toute fonction constante sur $[a,\ b]$ est en escalier sur $[a,\ b]$.

1.8 EXEMPLE. La fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
est en escalier sur $[0,2]$. Pour le voir, il suffit de remarquer que la subdivision $\sigma = \{0,1,2\}$ est adaptée à f. Le choix d'une subdivision adaptée à f n'est pas unique (il y en mêmeune infinité). Par exemple, la subdivision $\sigma' = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ est aussi adaptée à f puisque $f|_{]0,\frac{1}{2}[}$ et $f|_{]\frac{1}{2},1[}$ sont des fonctions constantes.

1.9 Exercice Soit $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} -1 \ \text{ si } \ x = 0 \\ 1 \ \text{ si } \ 0 < x < 1 \\ 3 \ \text{ si } \ x = 1 \\ -2 \ \text{ si } \ 1 < x \leq 2 \\ 4 \ \text{ si } \ 2 < x \leq 3. \end{cases}$
Montrer que f est en escalier sur $[0,3]$ et identifier une subdivision adaptée à f.

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

La notion d'intégrale repose sur la proposition suivante.

1.10 PROPOSITION
Soient $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $\sigma = \{x_0 < \ \dots < \ x_n\}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout entier $i \in [0,\ \dots,\ n-1]$, posons : $f(x) = c_i$ si $x \in]x_i,\ x_{i+1}[$.
Alors l'expression $I(\sigma,\ f) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à f. Le nombre réel $I(\sigma,\ f)$ ainsi obtenu se note

$$\int_a^b f(x)dx = I(\sigma,\ f) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$

et s'appelle *intégrale* de f sur $[a,\ b]$.

Démonstration: Choisissons une subdivision $\sigma \in \sigma([a,\ b])$ telle que $\sigma = \{x_0 <\ \dots <\ x_n\}$ soit une subdivision adaptée à f sur $[a,\ b]$. Considérons la subdivision $\tilde{\sigma} = \sigma \cup \{y\}$, où y est un point de $[a,\ b]$, distinct des points $x_i,\ i = 0,\ \dots,\ n$. Soit $i_0 \in \{0, 1,\ \dots,\ n-1\}$ tel que $x_{i_0} < y < x_{i_0+1}$. Alors $\tilde{\sigma} = \{x_0 <\ x_1 <\ \dots, x_{i_0} <\ y <\ x_{i_0+1} <\ \dots <\ x_n\}$ est adaptée à f et on a :

$$I(\tilde{\sigma},\ f) = \sum_{i=0}^{i_0-1} c_i(x_{i+1} - x_i) + c_{i_0}(y - x_{i_0}) + c_{i_0}(x_{i_0+1} - y) + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{i_0-1} ci(x_{i+1} - x_i) + c_{i_0}(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i) = I(\sigma,\ f).$$

Soient maintenant σ et σ' deux subdivisions adaptées à f. Alors, la subdivision $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ est encore adaptée à f et en itérant le calcul précédent pour chaque point de σ'', on obtient immédiatement que $I(\sigma,\ f) = I(\sigma'',\ f)$, et aussi $I(\sigma',\ f) = I(\sigma'',\ f)$. Par suite, $I(\sigma,\ f) = I(\sigma',\ f)$. ∎

1.12 **Exercice** Soit $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ la fonction définie au niveau de l'exercice 1.9.

1) Calculer $\int_0^3 f(x)dx$ *puis* $\int_0^3 |f(x)|dx$.
2) Soit $x \in [0, 3]$. *Calculer* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3) Montrer que l'application $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ (avec $F(x)$ défini comme en 2)) est continue sur $[0, 3]$. La fonction F est-elle dérivable en tout point de l'intervalle $[0, 3]$?

1.4 Interprétation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ pour une fonction *en escalier* positive ou nulle

Si $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est en escalier et positive ou nulle sur $[a,\ b]$, alors, pour tout entier $i \in [0,\ \dots,\ n-1]$, c_i est positif ou nul. Par suite : $I(\sigma,\ f) = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.
De plus, de la définition de $I(\sigma,\ f)$, il résulte que ce nombre est exactement la mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites $t = a,\ t = b$, et le graphe de la fonction f.
Lorsque $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est en escalier et n'est pas supposée positive ou nulle, $I(\sigma,\ f) = \int_a^b f(x)dx$ correspond à l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites $x = a,\ x = b$, et le graphe de la fonction f. Par exemple, si $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est constante et égale à -1, $\int_a^b f(x)dx = -(b-a) = -|b-a| < 0$.

Soit $c \in]a,\ b[$. On considère $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in [a,\ b] \setminus \{c\}$ et $f(c) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\int_a^b f(x)dx = (c-a)0 + (b-c)0 = 0$. Ainsi $\int_a^b f(x)dx$ peut être nulle sans que f soit identiquement nulle. Plus généralement, si $f(t) = 0$ sauf en un nombre fini de points de $[a,\ b]$, alors f est en escalier sur $[a,\ b]$ et on a $\int_a^b f(x)dx = 0$.

1.5 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

1.13 PROPOSITION
Soient $f,\ g \in \mathcal{E}([a,\ b])$. Alors :

(i) $f + g \in \mathcal{E}([a,\ b])$ et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(ii) Pour tout réel λ, on a $\lambda f \in \mathcal{E}([a,\ b])$ et $\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

(iii) Si $f \geq g$(i.e. : $\forall t \in [a,\ b],\ f(x) \geq g(x)$), alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

En particulier, $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(iv) Si $f = g$, sauf en un nombre fini de points de $[a,\ b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(v) Pour tout $c \in]\,a,\ b[$, on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, où $\int_a^c f(x)dx$ (resp. $\int_c^b f(x)dx$) désigne l'intégrale de la restriction de f au segment $[a,\ c]$ (resp. $[c, b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{E}([a,\ b])$.

Démonstration: Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,\ b]$ adaptées à f et g. Alors $\sigma'' = \sigma \cup \sigma' = \{x_0,\ \ldots,\ x_N\}$ est adaptée à f et à g. On en déduit que : $I(\sigma'', f) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$, où $c_i = f(x)$ si $x \in]x_i,\ x_{i+1}[$ et $I(\sigma'', g) = \sum_{i=0}^{N-1} c'_i(x_{i+1} - x_i)$ où $c'_i = g(x)$ si $x \in]x_i,\ x_{i+1}[$ et donc $I(\sigma'', f+g) = I(\sigma'', f) + I(\sigma'', g)$, d'où (i) et, de même (ii), (iii). En particulier, si $f \in \mathcal{E}([a,\ b])$, $|f| \in \mathcal{E}([a,\ b])$ et comme $-|f| \leq f \leq |f|$, on en déduit que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Pour (iv), soit $\theta = \{x_0, \ldots,\ x_N\}$ une subdivision de $[a,\ b]$ contenant les points x de $[a,\ b]$ pour lesquels $f(x) \neq g(x)$. Alors, on a immédiatement : $I(\theta, f) = I(\theta, g)$, d'où (iv). Soit maintenant $c \in]a,\ b[$. Notons f_1 et f_2 les restrictions de f aux segments $[a,\ c]$ et $[c,\ b]$; f_1 et f_2 sont encore des fonctions en escaliers. Considérons les fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ définies par :

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \in [a, c] \\ 0 & \text{si } x \in]c,\ b] \end{cases} \quad \text{et } \tilde{f}_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, c] \\ f_0(x) & \text{si } x \in]c,\ b] \end{cases}$$

Il résulte immédiatement de la définition et de la proposition que :

$$\int_a^c f_1(x)dx = \int_a^b \tilde{f}_1(x)dx \; et \; \int_c^b f_2(x)dx = \int_a^b \tilde{f}_2(x)dx.$$

Par ailleurs, les fonctions f et $g = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ coincident en tout point de $[a,\ b]\backslash\{c\}$, d'après (iv), on a donc : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, ce qui prouve (v). ∎

1.15 Exercice Soit f une fonction qui est en escalier sur $[0, 1]$ et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[a,\ b]$ *où* $a < 0 < b$. On suppose de plus que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

1) Montrer que les fonctions $f_+ := \max(f,\ 0)$ et $f_- := \min(f,\ 0)$ sont en escalier.

2) Montrer que $\int_0^1 f_+(x)dx = -\int_0^1 f_-(x)dx$. On note γ ce nombre.

3) Prouver qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que : $0 \leq \gamma \leq \min(\theta b; -(1-\theta)a)$.

4) Etablir l'inégalité : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq b \int_0^1 f_+(x)dx + a \int_0^1 f_-(x)dx$.

5) Déduire de ce qui précède la majoration : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq -ab$.

1.16 REMARQUE
Il résulte de cette proposition que $\mathcal{E}([a,\ b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ de $\mathcal{E}([a,\ b])$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire, compatible avec la structure d'ordre partiel $\leq$ sur $\mathcal{E}([a,\ b])$.

2 Fonction intégrable au sens de Riemann

On va étendre la notion d'intégrale à des fonctions $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ plus générales que les fonctions en escaliers.

2.1 DÉFINITION (FONCTION INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN (OU RIEMANN-INTÉGRABLE))
Une fonction $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) sur $[a, b]$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions en escaliers u_ϵ et $v_\epsilon \in \mathcal{E}([a,\ b])$ telles que :

(i) $u_\epsilon \leq f \leq v_\epsilon$.

(ii) $\int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon)(x)dx \leq \epsilon$.

On notera $\mathcal{R}([a,\ b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$.