Analyse 4, Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD5 : Covergence dominée ; fonctions définies par des intégrales

Exercice 1.

1) Rappeler le théorème de convergence dominée.

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$, par $f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in]0, \frac{1}{n}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.
Qu'elle est l'hypothèse du théorème de convergence dominée qui n'est pas vérifiée ?

Exercice 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(t) = e^t \sin^n(t)$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers une fonction f qu'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin^n(t)dt = 0$.

Exercice 3.

Montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leur limite.

1) $\int_0^1 \cos^{2n}(3x)dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}(x)}{x^2}dx, \quad n \geq 1$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{x^{2n}+1}}, \quad n \geq 1$

Exercice 4.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds & \text{si } t \neq 0 \\ f(0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer g' en fonction de f et g.
2. On suppose que $\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ converge. À l'aide de la question 1, montrer que

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Exercice 5.

1) Soit $f :]1,+\infty[\times[0,\pi]$ la fonction définie par $f(x,t) = \ln(x-\cos t)$.

On pose pour tout $x \in]1,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x,t)dt$.

Montrer que F est une fonction de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

2) En utilisant une autre expression de F, calculer pour tout $a > 1$ et $b > 1$:

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\right) dt.$$

Exercice 6.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} e^{-t}\, dt$.

1) Montrer que F est bien définie et est deux fois dérivables.

2) Calculer F'' et en déduire F.

Exercice 7.

Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$.

<u>Étude sur $]0,+\infty[$:</u>

1. Montrer que F est bien définie sur $]0,+\infty[$ et vérifie $|F(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]\ 0,+\infty[$ et calculer F'.
3. Á l'aide de deux intégrations par partie calculer F'.
4. En déduire que $F(x) = \lambda - \arctan(x)$ avec λ à déterminer.

<u>Étude en 0 :</u>

5. Montrer que F est définie en 0. On pose $H(t) := \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$
6. Montrer que H est une fonction continue dérivable sur $[\ 0,+\infty[$. Montrer que H est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
7. Montrer que $F(x) - F(0) = -x \displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)e^{-tx} dt$.
8. En déduire que F est continue en 0. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$.

Exercice 8.

Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+t)} dt$.

a) Etudier la dérivabilité de F.

b) Déterminer un équation différentielle du premier ordre satisfaite par F.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.