Analyse 4, Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD4 : Intégrales généralisées

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrable et $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ entraîne la convergence de $\int_0^\infty f(t)\, dt$.

2) $\int_0^\infty f(t)\, dt$ converge alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3) $\int_0^\infty |f(t)|\, dt$ converge alors $\int_0^\infty f(t)\, dt$ converge.

4) Si f est T-périodique et $F(T) = 0$ alors $\int_0^\infty f(t)\, dt$ converge .

5) Si f est impaire alors $\int_{-\infty}^\infty f(t)\, dt = 0$.

6) $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ est localement intégrable.

Exercice 2.

Calculer les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$ *e)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx \quad (n \in \mathbb{N})$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ *h)* $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x(x+r)} \quad (a>0,\ r>0)$ *i)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$

Exercice 3.

Déterminer la nature des intégrales suivantes et les calculer lorsqu'elles convergent :

$$\int_0^1 \ln(x)dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^\alpha}dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\ln(x)}dx \qquad \int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^2}dx \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Exercice 4.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} dx,\ \alpha > 0, \qquad \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) dx$$

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \ln\left(\sin\frac{1}{x}\right) dx \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{\sin(x^{\alpha})} dx,\ \alpha > 0, \qquad \int_0^1 \frac{1 - e^x + \alpha \sin x}{x^2} dx,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x} e^{-x} dx,\ \alpha > 0 \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} dx \qquad \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-ax} dx,\ \alpha > 0,\ a > 0.$$

Exercice 5.

Soient f et g sont deux fonctions localement intégrables, positives et d'intégrales convergente sur $[a,\ \infty[$. Montrer que $\displaystyle\int_a^{\infty} \sqrt{f(x)g(x)}dx$ converge.

Exercice 6.

Soit $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\ dx$.

a) Montrer que J est convergente et que l'on a $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\ dx$.

b) Montrer que $2J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$, et en déduire la valeur de J.

Exercice 7.

Déterminer pour quelles valeurs du couple $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$ les intégrales suivantes sont convergentes. On dessinera dans le plan l'ensemble des couples $(\alpha,\ \beta)$ pour lesquels il y a convergence).

$$a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x^{\beta})} \qquad b\ ) \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x^{\beta}} dx \qquad c\ ) \int_0^{\infty} \frac{(1+t)^{\alpha} - t^{\alpha}}{t^{\beta}} dt$$

Exercice 8.

Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :

$$a) \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \qquad b\ ) \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx \qquad c) \int_{\pi}^{\infty} x^2 \sin(x^4) dx$$

Exercice 9.

Pour α strictement positif, étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{\alpha}\sin^2 x}$.

Exercice 10.

On considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

1) On suppose que f est localement intégrable, possédant une limite l en $+\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$ est convergente. Montrer que $l = 0$.

En déduire que pour tout $\alpha \geq 1$, $\displaystyle\int_0^{\infty} (f(t))^{\alpha}\, dt$ est convergente

2) On suppose que f est uniformément continue et que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ est convergente. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3) On suppose que f est une application uniformément continue. Montrer que $\int_0^\infty e^{if(t)}dt$ est divergente. En déduire que $\int_0^\infty \sin(\sqrt{x})dx$ et $\int_0^\infty \cos(\sqrt{x})dx$ sont divergentes.

Exercice 11.

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur $[a,\ \infty[$ telle que $|f'(x)| \leq C$ pour tout $x \geq a$. La convergence de $\int_a^\infty f(x)dx$ implique-t-elle que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers ∞ ?

Exercice 12.

Soit n un entier ≥ 2. On pose $I_n^x := \int_0^x \frac{dt}{(t+1)\dots(t+n)}$, $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que l'intégrale I_n^∞ est convergente.
2. Réduire la fraction rationnelle en éléments simples et calculer I_n^x pour $x \in \mathbb{R}_+$
3. Pourquoi a-t-on $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} = 0$?
4. Calculer I_n^∞ sous la forme d'une somme finie.

Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive et telle que l'intégrale $\int_0^\infty (f(t))^2\, dt$ converge. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0$.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que les deux intégrales $\int_0^\infty |f(t)|dt$ et $\int_0^\infty (f'(t))^2\, dt$ convergent. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.

a) Montrer, pour $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{\sin(2n+1)x}{2\sin(x)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin(x)} = \frac{\pi}{2}$.

b) Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1; montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi(t)\sin(nt)\ dt = 0$.

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

d) Conclure que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.