UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse 4: Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD3 : Primitives et intégrales

Exercice 1.

1) Qu'est ce qu'une primitive d'une fonction ?

2) Les fonctions en escalier ont-elles des primitives ? qu'en est-il des fonctions continues ?

3) Rappeler le théorème de Darboux.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Répondre (en le justifiant) aux affirmations suivantes :

1) F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.

3) Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.

5) Si f est négative sur $\mathbb{R}$ alors F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6) Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

7) Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 3.

Les fonctions f suivantes ont-elles des primitives ?

1) $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

2) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

3) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

Exercice 4.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue.

Montrer que $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \geq (b-a)^2$, et que l'égalité a lieu si et seulement si f est constante.

Exercice 5.

1) Déterminer les primitives de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+1|$ si $x < 0$ et $f(x) = \ln(e+x)$ si $x \geq 0$.

Exercice 6.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en indiquant soigneusement leurs domaines de définition : $\dfrac{(\ln(x))^a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\sin(x)e^x$.

Exercice 7.

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{1/2} \frac{t^3}{1-t}dt \quad b) \int_0^1 \frac{t}{t^2-t+1}dt \quad c) \int_0^1 \frac{3t^2+3t+2}{t^3+t^2+t+1}dt.$$

Exercice 8.

Montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \int_{3x}^{\sin(4x)} \cos(t^2)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t^2 \arctan(t)\ dt, \qquad K = \int_0^{\pi/4} \tan^3(t)\ dt,$$
$$J = \int_0^{\pi/4} \cos(t)\ln(1+\cos(t))\ dt, \qquad L = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\ dt.$$

Exercice 10.

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\int_a^b f(t)dt \ = (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Exercice 11.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante réelle telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.

Exercice 12.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Montrer que la suite (I_n) converge.
3) Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
4) Montrer que le produit $(n\ +1)I_nI_{n+1}$ est constant.
5) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n$.
6) Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice 13.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Calculer I_n.

En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_k^n$.

Exercice 14.

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible} \end{cases}$
est Riemann-intégrable et calculer son intégrale.
(on pourra, après avoir remarqué que pour $\epsilon > 0$ il n'y a qu'un nombre fini de rationnels $x \in [0,1]$ tel que $f(x) \geq \epsilon$, construire une subdivision σ de $[0,1]$ pour laquelle la somme de Darboux supérieure $D_+(f,\sigma) \leq 2\epsilon$.)
La fonction f admet-elle des primitives sur $[0,1]$?

Des exercices pour s'entrainer au calcul de primitives :

Exercice 15.

1) Montrer que si $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx.$$

2) Calculer, en utilisant 1), les intégrales suivantes :

$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(x)\right)\, dx.$$

Exercice 16.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$i)\ f(x) = (\tan(x))^2 \quad ii)\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \quad iii)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$iv)\ f(x) = \frac{1}{3+e^{-x}} \quad v)\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1} \quad vi)\ f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+4}$$

Exercice 17.

Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{1}{\sin(x)}dx \quad b) \int \frac{1}{\sinh(x)}dx \quad c) \int \frac{1}{\cosh(x)}dx$$

$$d) \int e^x \cos(x)dx \quad e) \int e^x \sin(x)dx \quad f) \int \arcsin(x)\ dx$$

$$g) \int \tan^2 x\ dx \quad h) \int \sqrt{x^2-1}\ dx \quad i) \int \frac{e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx$$

$$j) \int \frac{dx}{\sin(x)\sqrt{\cos(x)}} \quad k) \int \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)}\ dx \quad l) \int \frac{\cosh(2x)}{\sinh(3x)}\ dx$$

$$m) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad n) \int \sin^5(x)\ dx \quad o) \int \cos^4(x)dx$$

$$p) \int \ln(x)dx \quad q) \int \ln^2(x)dx \quad r) \int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

Exercice 18.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes et en calculer une primitive :

$$a)\ \frac{1}{X^3-X} \quad b)\ \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \quad c)\ \frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$$d)\ \frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2} \quad e)\ \frac{X^3+1}{(X-1)^3} \quad f)\ \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

$$g)\ \frac{X}{(X^2-1)(X^2+1)^2} \quad h)\ \frac{2X+1}{(X-2)^3(x-1)} \quad i)\ \frac{X^4}{(X^2+X+1)^2}.$$