Analyse 4, Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD2 : Fonction Riemann intégrable, intégrale de Riemann

Exercice 1.

1) Rappeler la définition d'une fonction Riemann intégrable sur un intervalle $[a,\ b]$.
2) Les fonctions en escalier sont-elles Riemann intégrables ?
3) Qu'est ce qu'une somme de Riemann ?

Exercice 2.

Les fonctions f suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

1) $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = [x]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.
2) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} [\frac{1}{x}] & \text{si} \quad 0 < x \ \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad \quad x \ = 0. \end{cases}$
3) $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad 0 < x \ \leq 1 \\ 3 & \text{si} \quad \quad x = 0. \end{cases}$
4) $k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $k(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} & \text{si} \quad 0 < x \ \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad \quad x = 0. \end{cases}$

Exercice 3.

En utilisant la définition d'une intégrale de Riemann, calculer $\displaystyle\int_0^2 (3x + 1)dx$.

Exercice 4.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

1) Trouver une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue positive telle que $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

1) Calculer, pour tout $x \in [0,2]$, l'intégrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

2) La fonction $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ est-elle continue sur $[0,2]$.

3) F est-elle dérivable en tout point de $[0,2]$?

Exercice 6.

Montrer que les suites ci-dessous sont convergentes et calculer leur limite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}, \qquad v_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (2n+k)^p, \ (p \in \mathbb{R}), \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$r_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}, \qquad t_n = -n + \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}.$$

Exercice 7.

Soit α un réel tel que $|\alpha| \neq 1$.

1) Montrer que, pour tout réel x, on a $1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2 > 0$.

2) Soit n un entier $n \geq 2$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\alpha \ \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \alpha^2\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\alpha - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(\alpha - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right).$$

3) En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\alpha \ \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \alpha^2\right) = (\alpha^n - 1)^2$$

4) En utilisant les sommes de Riemann, calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2)dx$$

Exercice 8.

Soit x un réel strictement positif.

1) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{e^x - 1}{x}$$

2) En déduire, pour tout $x > 0$, la relation $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$.

Exercice 9.

La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est-elle intégrable au sens de Riemann ? que vaut $\int_0^1 f(x)dx$?