UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse 4, Intégrale de fonctions de la variable réelle

TD n°1 : Fonctions en escalier, intégrale de Riemann

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1) Vérifier que f une fonction en escalier.
2) Donner deux subdivisions (non comparables) σ et σ' adaptées à f.
3) Calculer $I(\sigma,\ f)$.
4) Vérifier que $I(\sigma',\ f) = I(\sigma,\ f) = I(\sigma \cup \sigma',\ f)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

1) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.
2) Pour tout $x \in [0,2]$, on pose $f_+(x) = \max(0,\ f(x))$ et $f_-(x) = \min(0,\ f(x))$.
   a) Vérifier que f_+ et f_- sont deux fonctions en escalier.
   b) Calculer $A = \displaystyle\int_0^2 f_+(x)\ dx$ et $B = \displaystyle\int_0^2 f_-(x)\ dx$.
   c) Montrer que $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$ pour tout $x \in [0,2]$.
   d) Vérifier que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ dx = A + B$.
   e) Que vaut $\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\ dx$? Vérifier que $\displaystyle\left|\int_0^2 f(x)\ dx\right| \leq \int_0^2 |f(x)|\ dx$.

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = x^3$ sur $[0, 1]$. On se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre le graphe de f et l'axe des x sur l'intervalle $[0, 1]$.

1) Dessiner le graphe de f sur $[0, 1]$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, découper $[0, 1]$ en n sous intervalles de taille $\dfrac{1}{n}$ puis sur chaque segment $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ dessiner les rectangles de hauteurs $\left(\dfrac{k}{n}\right)^3$ et $\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^3$ respectivement.

3) On pose

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \\ S_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3 \end{aligned}$$

   a) Que représente les sommes s_n et S_n ?

   b) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

   c) Calculer explicitement s_n et S_n.

   d) En déduire l'aire $\mathcal{A}$.

Exercice 4

Montrer que la somme, la multiplication par un scalaire et le produit de deux fonctions en escalier sont des fonctions en escalier.
Vérifier ces propriétés sur des exemples simples.

Exercice 5

Montrer que si f est une fonction en escalier alors $|f|$ l'est aussi. Vérifier cette propriété sur des exemples simples. La fonction $\ln(|f| + 1)$ est-elle en escalier ?

Exercice 6

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^x$.
Justifier qu'elles sont Riemann-intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales

$$\int_0^1 f(x)dx,\ \int_1^2 g(x)dx \ et\ \int_0^x h(t)dt.$$