Université Rennes I **Année 2010-2011**

Unité d'enseignement AN4

Examen - Durée : 2 heures.

Exercice 1

Soit $f : [2\,,\,+\infty[\; \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(t) \;=\; \frac{1}{n\,\ln n} \quad \text{pour} \quad t \in [n, n+1[\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,.$$

1.1. On fixe un entier n avec $n > 2$. Expliquer pourquoi la fonction f est *en escalier* sur l'intervalle $[2, n]$ et identifier une subdivision adaptée à f.

La subdivision $\sigma := \{2, 3, 4, \cdots, n\}$ *est adaptée à* f *puisque* f *est constante sur chaque sous-intervalle* $[j, j+1[$ *avec* $j \in \{2, \cdots, n-1\}$*. Le nombre de ces intervalles étant fini, la fonction* f *est en escalier.*

1.2. Ecrire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^n f(t)\,dt$ sous la forme d'une somme finie.

$$\int_2^n f(t)\,dt \;=\; \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j\,\ln j}\,.$$

1.3. Etablir l'inégalité $\displaystyle\int_{\ln\,2}^{\ln\,n} \frac{ds}{s} \;\leq\; \int_2^n f(t)\,dt\,.$

On pose $g(t) := \dfrac{1}{t\,\ln t}$*. On a* $g(t) \leq f(t)$ *pour* $t \in [2, n[$*. Par comparaison puis en effectuant le changement de variable* $s = \ln t$*, cela conduit à :*

$$\int_{\ln\,2}^{\ln\,n} \frac{ds}{s} \;=\; \int_2^n g(t)\,dt \;\leq\; \int_2^n f(t)\,dt\,.$$

1.4. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ln n}$?

Un calcul direct fournit:

$$\int_{\ln\,2}^{\ln\,n} \frac{ds}{s} \;=\; \ln(\ln\,n) - \ln(\ln\,2) \;\leq\; \int_2^n f(t)\,dt \;=\; \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j\,\ln j}\,.$$

Comme le membre de gauche tend clairement vers $+\infty$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*, la série est divergente.*

Exercice 2

Soit $f : [0\,,\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui vaut 0 en $t = 0$, et qui admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$(1) \qquad t \geq T \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - l| \leq \varepsilon\,.$$

2.1. On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etablir l'identité :

$$\int_0^x \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\, dt \; = \; \int_{a\,x}^{b\,x} \frac{f(t)}{t}\, dt\,.$$

On commence par remarquer que les deux fonctions $t \mapsto t^{-1}\,f(a\,t)$ et $t \mapsto t^{-1}\,f(b\,t)$ se prolongent par continuité en $t = 0$ par les valeurs $a\,f'(0)$ et $b\,f'(0)$. Elles sont donc Riemann intégrables sur $[0, x]$. Ensuite, c'est la relation de Chasles combinée aux changements de variables $s = b\,t$ et $\tilde{s} = a\,t$ qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\, dt &= \int_0^x \frac{f(b\,t)}{t}\, dt - \int_0^x \frac{f(a\,t)}{t}\, dt \\ &= \int_0^{b\,x} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int_0^{a\,x} \frac{f(t)}{t}\, dt \; = \; \int_{a\,x}^{b\,x} \frac{f(t)}{t}\, dt\,.\end{aligned}$$

2.2. En s'appuyant sur (1), montrer l'existence de $X \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$x \geq X \quad \Longrightarrow \quad \Big|\int_0^x \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\, dt \,-\, l\, \ln\big(\frac{b}{a}\big)\Big| \leq \varepsilon\, \ln\big(\frac{b}{a}\big)\,.$$

On choisit X de façon à ce que $b\,X \geq a\,X > T$ de sorte que :

$$x \geq X \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - l| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall\, t \in [a\,X, b\,X]\,.$$

Pour de tels $x \geq X$, on a alors :

$$\begin{aligned}\Big|\int_{a\,x}^{b\,x} \frac{f(t)}{t}\, dt \,-\, l\, \ln\big(\frac{b}{a}\big)\Big| \; &= \; \Big|\int_{a\,x}^{b\,x} \frac{f(t)}{t}\, dt \,-\, \int_{a\,x}^{b\,x} \frac{l}{t}\, dt\Big| \\ \leq \int_{a\,x}^{b\,x} \frac{|f(t) - l|}{t}\, dt \; &\leq \; \int_{a\,x}^{b\,x} \frac{\varepsilon}{t}\, dt \; \leq \varepsilon\, \ln\big(\frac{b}{a}\big)\,.\end{aligned}$$

2.3. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Il suffit de s'appuyer sur la question 2.2 qui indique que $\displaystyle\int_0^x \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\, dt$ *converge vers une limite finie égale à* $l\, \ln\big(\dfrac{b}{a}\big)$.

2.4. Soit $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ avec $\alpha < \beta$. Effectuer le changement de variables $t = -\ln s$ au niveau de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{s-1}{\ln s}\, ds$.

On trouve :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{s-1}{\ln s}\, ds \;=\; \int_{-\ln \alpha}^{-\ln \beta} \frac{e^{-t}-1}{-t}\;(-\,e^{-t})\; dt \;=\; -\;\int_{-\ln \beta}^{-\ln \alpha} \frac{e^{-2t}-e^{-t}}{t}\; dt\,.$$

2.5. Déduire de ce qui précède que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{s-1}{\ln s}\, ds$ converge et calculer sa valeur.

On applique la question 2.4. Avec $\alpha \to 0$ et $\beta \to 1$, on voit qu'on a affaire à:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(b\,t)-f(a\,t)}{t}\; dt \quad \textit{avec} \quad f(t)=e^{-t}-1\,, \quad a=1\,, \quad b=2\,.$$

Il suffit alors de renvoyer à 2.3 qui donne la convergence avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{s-1}{\ln s}\, ds = -\ln 2.$

Exercice 3

3.1. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\cos(t\,x)\; dt$ est absolument convergente. On note $f(x)$ sa valeur.

Cela tient à ce que:

$$(\star) \qquad |e^{-t}\,\cos(t\,x)| \;\leq\; e^{-t}\,, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\; dt \;=\; 1 \;<\; +\infty\,.$$

3.2. En appliquant le *théorème de continuité sous le signe somme* (après en avoir vérifié les hypothèses), prouver que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

On observe que:

a) Pour tout x, la fonction $t \longmapsto e^{-t}\,\cos(t\,x)$ est localement intégrable sur $[0,+\infty[$;

b) Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longmapsto e^{-t}\,\cos(t\,x)$ est continue ;

c) On dispose de la majoration uniforme en $x \in \mathbb{R}$ soulignée en $(\star)$.

La continuité de f découle alors du théorème de continuité sous le signe somme.

3.3. En s'appuyant sur une double intégration par parties, calculer $f(x)$.

On trouve :

$$f(x) \;=\; 1 - x \int_0^{+\infty} e^{-t}\;\sin(t\,x)\; dt \;=\; 1 - x^2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\;\cos(t\,x)\; dt\,.$$

D'où l'on déduit facilement $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.

EXERCICE 4

Cet exercice porte sur l'étude de l'application :

$$f \,:\, [1,+\infty[\times[0,+\infty[\;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$
$$(x,t) \;\longmapsto\; f(x,t) \;=\; \frac{e^{-(t+1)\,x}}{t+1}\,.$$

Le réel $x \in [1,+\infty[$ ou $t \in [0,+\infty[$ étant fixés, on note :

$$f_{x,} \,:\, [0,+\infty[\;\longrightarrow\; \mathbb{R}, \quad t \;\longmapsto\; f_{x,}(t) \;:=\; f(x,t)\,, \qquad\qquad f_{,t} \,:\, [1,+\infty[\;\longrightarrow\; \mathbb{R}, \quad x \;\longmapsto\; f_{,t}(x) \;:=\; f(x,t)\,.$$

On considère aussi la fonction :

$$F \,:\, [1,+\infty[\;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$
$$x \;\longmapsto\; \int_0^{+\infty} f(x,t)\;dt = \int_0^{+\infty} f_x(t)\;dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t+1)\,x}}{t+1}\;dt\,.$$

4.1. Expliquer brièvement pourquoi la fonction F est bien définie.

Cela tient à ce que :

$$(*) \qquad \Big|\frac{e^{-(t+1)\,x}}{t+1}\Big| \;\leq\; e^{-t}\,, \quad \forall\,(x,t)\in[1,+\infty[\times[0,+\infty[\,, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\;dt = 1 < +\infty\,.$$

4.2. Soit $t \in [0,+\infty[$. Montrer que l'application $f_{,t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \;=\; -\,e^{-x}\;e^{-(t\,x)}\,.$$

4.3. Rappeler quel est l'énoncé du *théorème de dérivabilité sous le signe somme.* On demande en particulier de rappeler quelles en sont les hypothèses.

Voir le cours.

4.4. Montrer que ces hypothèses se trouvent vérifiées dans le cas présent. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la dérivée de la fonction F ?

On observe que :

a) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto f_{x,}(t)$ est localement intégrable sur $[0,+\infty[$;

b) Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longmapsto f_{,t}(x)$ est dérivable ;

c) On dispose de la majoration uniforme :

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \;=\; |e^{-x}\;e^{-(t\,x)}| \;\leq\; g(t) := e^{-t}\,, \qquad \forall\,(x,t)\in[1,+\infty[\times[0,+\infty[$$

où la fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

La dérivabilité de F découle alors du théorème de dérivabilité sous le signe somme.

4.5. Déduire de ce qui précède l'expression explicite de $F'(x)$.

$$F'(x) \;=\; -\,e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-(t\,x)}\;dt \;=\; -\,\frac{e^{-x}}{x}\,.$$

4.6. Justifier la formule : $F(x) \;=\; \displaystyle\int_x^{+\infty} s^{-1}\;e^{-s}\;ds\,.$

○ *<u>Méthode</u> <u>1</u>. On a clairement :*

$$0 \;\leq\; F(x) \;\leq\; e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-t}\;dt \;\leq\; e^{-x}\,.$$

En particulier, cela dit que F tend vers 0 en $+\infty$. On peut donc écrire :

$$F(x) \;=\; -\int_x^{+\infty} F'(s)\;ds \;=\; \int_x^{+\infty} s^{-1}\;e^{-s}\;ds\,.$$

○ *<u>Méthode</u> <u>2</u>. Partir de la définition initiale de F et effectuer le changement de variables $s = (t+1)\,x$ où x est vu comme un paramètre.*

4.7. Justifier la formule : $F(x) + \ln\,x \;=\; \displaystyle\int_x^{1} s^{-1}\;(e^{-s}-1)\;ds \;+\; \int_1^{+\infty} s^{-1}\;e^{-s}\;ds$

On a par définition :

$$F(x) + \ln\,x \;=\; \int_x^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}\;ds \;-\; \int_x^{1} \frac{1}{s}\;ds\,.$$

On peut appliquer la relation de Chasle :

$$F(x) + \ln\,x \;=\; \int_x^{1} \frac{e^{-s}-1}{s}\;ds \;+\; \int_1^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}\;ds\,.$$

ce qui conduit au résultat recherché par simple regroupement des termes.

4.8. Trouver un équivalent de F pour x qui tend vers 0 par valeurs positives.

On peut s'appuyer sur le 4.7. La fonction $s \longrightarrow s^{-1}\;(1-e^{-s})$ se prolonge par continuité en $s=0$. Par conséquent :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \int_x^{1} \frac{e^{-s}-1}{s}\;ds \;=\; \int_0^{1} \frac{e^{-s}-1}{s}\;ds \in \mathbb{R}\,.$$

Cela implique :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\; F(x) + \ln\,x \;=\; \int_0^{1} \frac{e^{-s}-1}{s}\;ds \;+\; \int_1^{+\infty} s^{-1}\;e^{-s}\;ds\,.$$

ce qui suffit pour pouvoir affirmer $F(x) \sim -\ln\,x$.

Question bonus (sur 4 points). Effectuer une étude adaptée de celle qui est proposée ci-dessus en vue d'analyser la dérivabilité de la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{F} \;: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\,(t+1)\,x}}{t+1}\;dt\,. \end{array}$$

La première chose à faire, comme en 4.1, est d'expliquer pourquoi $\tilde{F}$ est bien définie. Une intégration par parties fournit :

$$(\square) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\,(t+1)\,x}}{t+1}\, dt = \frac{e^{-i\,x}}{i\,x} - \frac{1}{i\,x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\,(t+1)\,x}}{(t+1)^2}\, dt\,.$$

L'intégrale généralisée de droite est absolument convergente (donc convergente) car :

$$\Big|\frac{e^{-i\,(t+1)\,x}}{(t+1)^2}\Big| \leq \frac{1}{(t+1)^2}\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = 1 < +\infty\,.$$

Ensuite, pour $x \in [1,+\infty[$, il s'agit d'avoir accès à $\tilde{F}'(x)$. Le point de départ est l'identité $(\square)$. Une seconde intégration par parties permet d'interpréter l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\,(t+1)\,x}}{(t+1)^2}\, dt$$

en vue de dégager cette fois-ci une décroisssance en $(t+1)^{-3}$. Finalement, on peut appliquer comme ci-dessus le théorème de dérivabilité sous le signe somme (dont on prend soin de vérifier les hypothèses) pour terminer le calcul.