Université Rennes I **Année 2010-2011**

Unité d'enseignement AN4
Examen - Durée : 2 heures.

Exercice 1

Soit $f : [2\,,\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(t) \;=\; \frac{1}{n\,\ln n} \quad \text{pour} \quad t \in [n, n+1[\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,.$$

1.1. On fixe un entier n avec $n > 2$. Expliquer pourquoi la fonction f est *en escalier* sur l'intervalle $[2, n]$ et identifier une subdivision adaptée à f.

1.2. Ecrire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^n f(t)\,dt$ sous la forme d'une somme finie.

1.3. Etablir l'inégalité $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{ds}{s} \;\leq\; \int_2^n f(t)\,dt.$

1.4. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ln n}$?

Exercice 2

Soit $f : [0\,,\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui vaut 0 en $t = 0$, et qui admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que :

(1) $\qquad t \geq T \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - l| \leq \varepsilon\,.$

2.1. On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etablir l'identité :

$$\int_0^x \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\,dt \;=\; \int_{a\,x}^{b\,x} \frac{f(t)}{t}\,dt\,.$$

2.2. En s'appuyant sur (1), montrer l'existence de $X \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$x \geq X \quad \Longrightarrow \quad \Big|\int_0^x \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\,dt \,-\, l\,\ln\big(\frac{b}{a}\big)\Big| \leq \varepsilon\,\ln\big(\frac{b}{a}\big)\,.$$

2.3. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(b\,t) - f(a\,t)}{t}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

2.4. Soit $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ avec $\alpha < \beta$. Effectuer le changement de variables $t = -\ln s$ au niveau de l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{s-1}{\ln s}\,ds.$

2.5. Déduire de ce qui précède que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{s-1}{\ln s}\,ds$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 3

3.1. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t\,x)\, dt$ est absolument convergente. On note $f(x)$ sa valeur.

3.2. En appliquant le *théorème de continuité sous le signe somme* (après en avoir vérifié les hypothèses), prouver que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.3. En s'appuyant sur une double intégration par parties, calculer $f(x)$.

Exercice 4

Cet exercice porte sur l'étude de l'application :

$$\begin{array}{rccl} f \,:\, [1,+\infty[\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) & = \dfrac{e^{-(t+1)\,x}}{t+1}\,. \end{array}$$

Le réel $x \in [1,+\infty[$ ou $t \in [0,+\infty[$ étant fixés, on note :

$$\begin{array}{rcl} f_{x,} \,:\, [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_{x,}(t) \,:=\, f(x,t)\,, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_{,t} \,:\, [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_{,t}(x) \,:=\, f(x,t)\,. \end{array}$$

On considère aussi la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F \,:\, [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\; dt = \int_0^{+\infty} f_{x,}(t)\; dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t+1)\,x}}{t+1}\; dt\,. \end{array}$$

4.1. Expliquer brièvement pourquoi la fonction F est bien définie.

4.2. Soit $t \in [0,+\infty[$. Montrer que l'application $f_{,t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée partielle $(\partial f/\partial x)(x,t)$.

4.3. Rappeler quel est l'énoncé du *théorème de dérivabilité sous le signe somme.* On demande en particulier de rappeler quelles en sont les hypothèses.

4.4. Montrer que ces hypothèses se trouvent vérifiées dans le cas présent. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la dérivée de la fonction F ?

4.5. Déduire de ce qui précède l'expression explicite de $F'(x)$.

4.6. Justifier la formule : $\displaystyle F(x) \;=\; \int_x^{+\infty} s^{-1}\; e^{-s}\; ds\,.$

4.7. Justifier la formule : $\displaystyle F(x) + \ln x \;=\; -\int_x^1 s^{-1}\;(1-e^{-s})\; ds + \int_1^{+\infty} s^{-1}\; e^{-s}\; ds\,.$

4.8. Trouver un équivalent de F pour x qui tend vers 0 par valeurs positives.

Question bonus (sur 4 points). Effectuer une étude adaptée de celle qui est proposée ci-dessus en vue d'analyser la dérivabilité de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F} \,:\, [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\,(t+1)\,x}}{t+1}\; dt\,. \end{array}$$